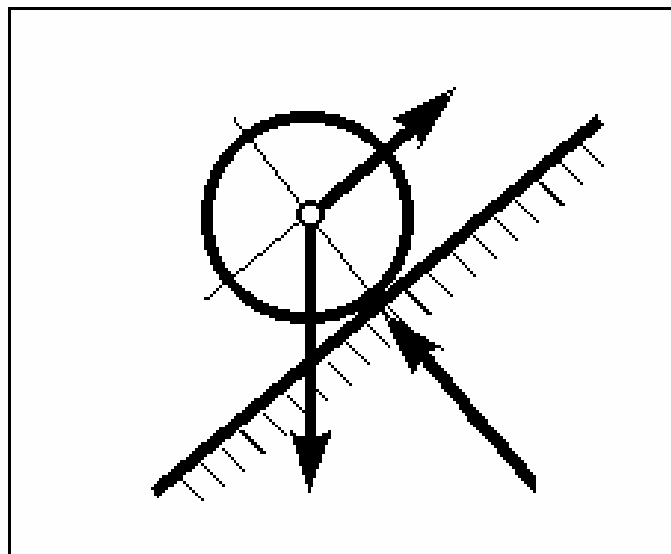


В.О. Приятельчук, В.І. Риндюк, В.О. Федотов

Теоретична механіка. Статика

Розрахунково-графічні та контрольні
завдання



Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет

В.О. Приятельчук, В.І. Риндюк, В.О. Федотов

Теоретична механіка. Статика

Розрахунково-графічні та контрольні
завдання

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів бакалаврських напрямків: 6.092100 – “Будівництво”; 6.090202 – “Інженерна механіка”; 6.092302 – “Зварювання”; 6.092200 – “Електромеханіка”; 6.090500 – “Енергетика”; 6.090600 – “Електромеханіка”; 6.090700 – “Радіотехніка”.

Протокол № 7 від 28 лютого 2002 р.

Вінниця ВДТУ 2002

УДК 531 (075)
П 77

Р е ц е н з е н т и :

В.Ф. Анісімов, доктор технічних наук, професор

І.О. Сивак, доктор технічних наук, професор

В.І. Савуляк, кандидат технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Приятельчук В.О., Риндюк В.І., Федотов В.О.

П77 **Теоретична механіка. Статика.** Розрахунково-графічні та контрольні завдання. Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 108с.

В посібнику приведені вісім завдань із розділу статички, причому п'ять із них виконуються з використанням ПЕОМ. Кожне завдання має триста варіантів з прикладом виконання.

Для студентів денної та заочної форм навчання.

Зміст

1	Порядок та основні вимоги до виконання роботи.....	4
2	Контрольні завдання.....	5
	С.1 Збіжна система сил.....	5
	1.1 Приклад виконання завдання... ..	5
	С.2 Плоска система паралельних сил.....	10
	2.1 Приклади виконання завдання..... ..	10
	С.3 Плоска довільна система сил.....	18
	3.1 Приклад виконання завдання..... ..	19
	С.4 Розрахунок та дослідження плоскої ферми.....	28
	4.1 Приклад виконання завдання..... ..	29
	4.1.1 Аналітичне знаходження опорних реакцій ферми	40
	4.1.2 Графічне знаходження опорних реакцій ферми за допомогою силового та вірвовочного багатокутників.....	41
	4.1.3 Розрахунок зусиль в стержнях методом вирізання вузлів..	42
	4.1.4 Розрахунок зусиль в стержнях ферми методом наскрізних розрізів (метод Ріттера).....	46
	4.1.5 Знаходження зусиль в стержнях ферми графічним методом (побудова діаграми Максвелла-Кремони).....	48
	4.1.6 Знаходження опорних реакцій зусиль в стержнях ферми при змінному значенні кута α	50
	С.5 Розрахунок та дослідження збірної конструкції	53
	5.1 Приклад виконання завдання	64
	С.6 Рівновага сил з врахуванням зчеплення (тертя спокою).....	69
	6.1 Приклади виконання завдання.....	69
	С.7 Розрахунок опорних реакцій просторової конструкції.....	85
	7.1 Приклад виконання завдання.....	91
	С.8 Визначення центра ваги плоских тіл.....	95
	8.1 Приклад виконання завдання.....	101
	Література.....	107

1 Порядок та основні вимоги до виконання роботи

З розділу “Статика” студенти виконують одну розрахунково-графічну або контрольну роботу задачі якої, для відповідного напрямку підготовки, вибирають з таблиці 1. Студенти заочної форми навчання вибирають варіант схеми (рисунок) за двома останніми цифрами залікової книжки (шифр) з таблиці 1, а дані для розрахунку – за останньою цифрою шифру з таблиць, що приведені в завданнях. Варіанти завдання для студентів денної форми навчання вказує викладач.

Таблиця 1

Вар.	Шифр	Напрями підготовки					
		6.090200	6.092100	6.092200	6.092300	6.090500	6.090600 6.090700
1	01, 31, 61, 91						
2	02, 32, 62, 92	С.3,	С.4,	С.3,	С.2,	С.1,	С.1,
...	С.5,	С.6,	С.5,	С.3,	С.2,	С.2,
29	09, 39, 69, 99	С.7,	С.7,	С.6,	С.7,	С.3,	С.3,
30	00, 30, 60, 90	С.8	С.8	С.7	С.8	С.7	С.7

Студенти денної форми навчання оформляють розрахунково-графічне завдання у відповідності до діючих стандартів ЄСКД(2.105 і 2.106 для текстових конструкторських документів та 2.104 – для основних надписів).

Студенти заочної форми навчання виконують завдання в зошитах. На титульній сторінці зошита вказується номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, шифр, факультет, група і домашня адреса.

Розв’язання кожної задачі потрібно починати на розвороті зошита (з лівої сторінки), так, щоб розрахункова схема та відповідні їй формули, знаходились поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант і приводиться коротка умова задачі (що відомо та що потрібно знайти). Розрахункові схеми (рисунок) виконуються за допомогою креслярських приладів. Розрахунки необхідно супроводжувати короткими поясненнями. На кожній сторінці залишаються поля для зауважень рецензента. Якщо робота висилається на повторну перевірку (при виконанні її у другому зошиті) обов’язково прикладається незархована робота.

Після зарахування усіх задач студент повинен до іспиту захистити роботу. Графік приїзду студентів на захист планується деканатом.

2 Контрольні завдання

С.1 Збіжна система сил

На схемах (рис. 1.2–1.4) приведені варіанти підвісу ліхтаря вагою Q . Знайти зусилля у тросі BC та стержні AB . Дані для розрахунку приведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Варіант	Q , Н	α , град	β , град	γ , град
1	50	30	45	30
2	40	30	60	45
3	60	60	30	60
4	30	30	120	75
5	45	30	60	15
6	60	30	60	30
7	70	60	30	45
8	30	60	75	60
9	80	30	60	75
0	150	60	30	45

1.1 Приклад виконання завдання

Дано: схема підвісу ліхтаря (рис. 1.1); $Q=165\text{Н}$, $\alpha=60^\circ$; $\beta=45^\circ$; $\gamma=150^\circ$.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу блока D (рис 1.5). Зусилля в кабелі на якому висить ліхтар дорівнює вазі ліхтаря Q (нехтуємо тертям кабеля по блоку D). Відкидаємо стержень AB та трос BC і їх дію

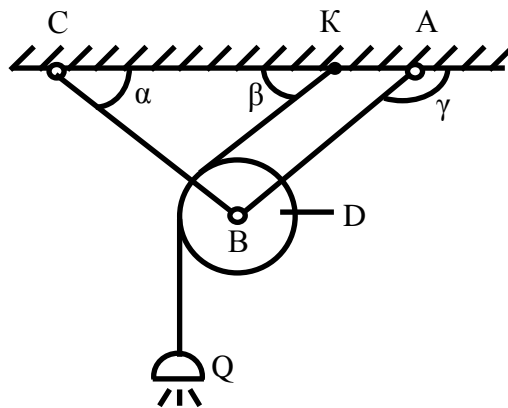


Рисунок 1.1

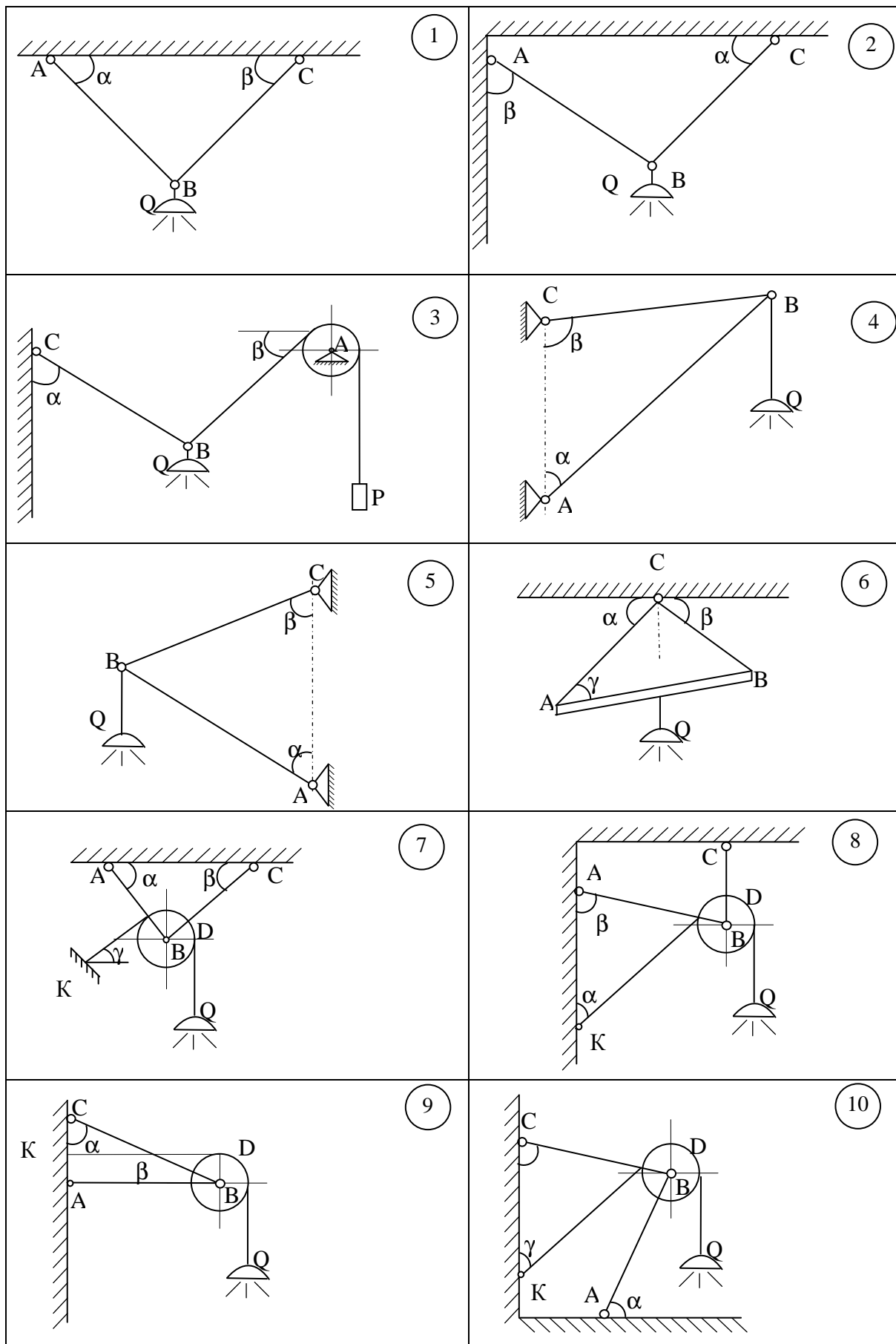


Рисунок 1.2

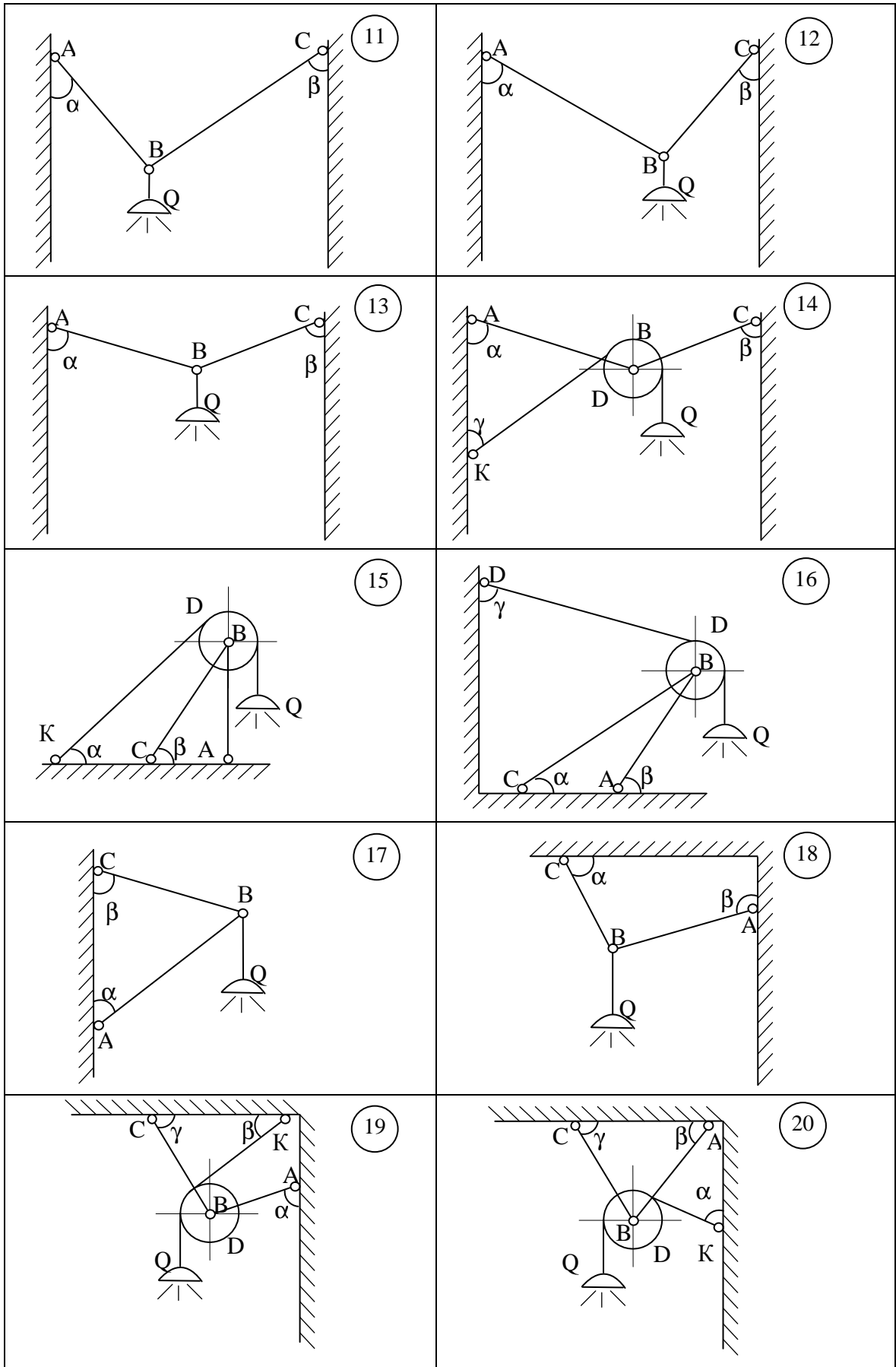


Рисунок 1.3

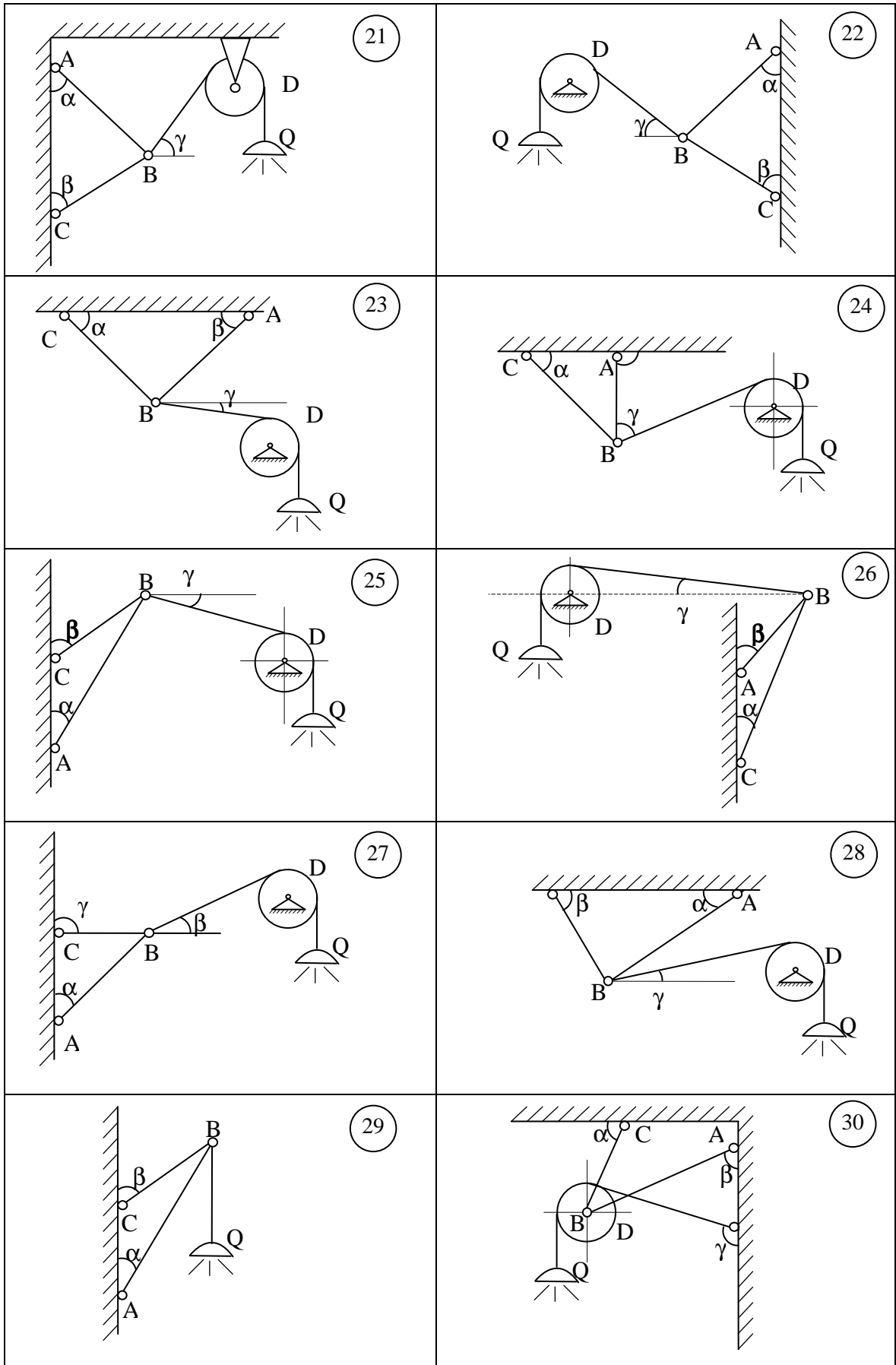


Рисунок 1.4

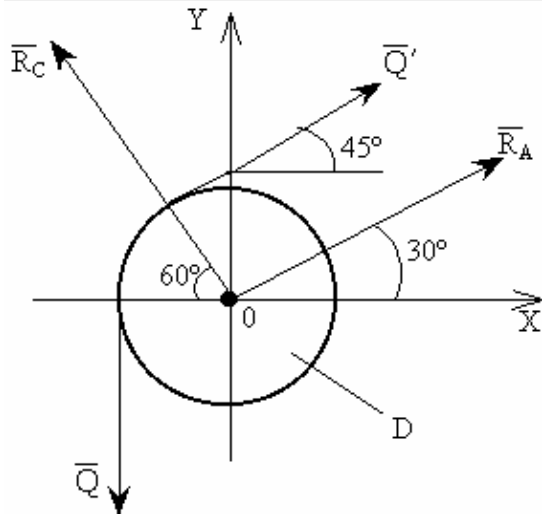


Рисунок 1.5

замінюємо силами $\vec{R}_A, \vec{R}_C, \vec{Q}, \vec{Q}'$ з якими вони діють на блок D.

При цьому враховуємо, що трос працює тільки на розтягування, а тяга OA (стержень) може як стискатись, так і розтягуватися.

Під дією системи сил $\{\vec{R}_A, \vec{R}_C, \vec{Q}, \vec{Q}'\}$ блок D знаходиться у рівновазі ($\{\vec{R}_A, \vec{R}_C, \vec{Q}, \vec{Q}'\} \sim 0$), причому $\vec{Q} = \vec{Q}'$. Запишемо рівняння рівноваги для сил, що прикладені до блока D.

Рівняння рівноваги

$$\Sigma F_x = 0; \quad \vec{Q} \cdot \cos 45^\circ + R_A \cdot \cos 30^\circ - R_C \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad -\vec{Q} + \vec{Q}' \cdot \sin 45^\circ + R_C \cdot \sin 60^\circ + R_A \cdot \sin 30^\circ = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$R_A = Q \frac{1 - \sin 45 - \cos 45 \cdot \operatorname{tg} 60}{\sin 30 + \cos 30 \cdot \operatorname{tg} 60} = -76,40 \text{ H},$$

$$R_C = \frac{Q \cdot \cos 45 + R_A \cdot \cos 30}{\cos 60} = -100,30 \text{ H}.$$

Відповідь: $R_A = -76,85 \text{ H}; \quad R_C = 100,21 \text{ H}.$

С.2 Плоска система паралельних сил

Балка (рис.2.1–2.6) завантажена силою F , розподіленим навантаженням інтенсивністю q та парою сил з моментом M . Знайти реакції в'язей. Дані для розрахунків приведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Варіант	M , кН·м	F , кН	Q , кН/м	a , м	b , м	c , м	d , м
1	5	4	2	2	3	4	2
2	6	3	1	3	2	5	1
3	1	5	2	1	2	4	3
4	4	1	2	2	3	5	1
5	6	8	1	3	2	4	2
6	3	5	2	1	3	5	2
7	4	6	1	2	3	4	1
8	5	7	2	3	2	5	2
9	6	8	1	1	2	4	2
0	5	3	2	2	3	5	3

2.1 Приклади виконання завдання

Приклад 1: Для балки (Рис 2.7) знайти опорні реакції, якщо $F=3$ кН, $q=1$ кН/м.

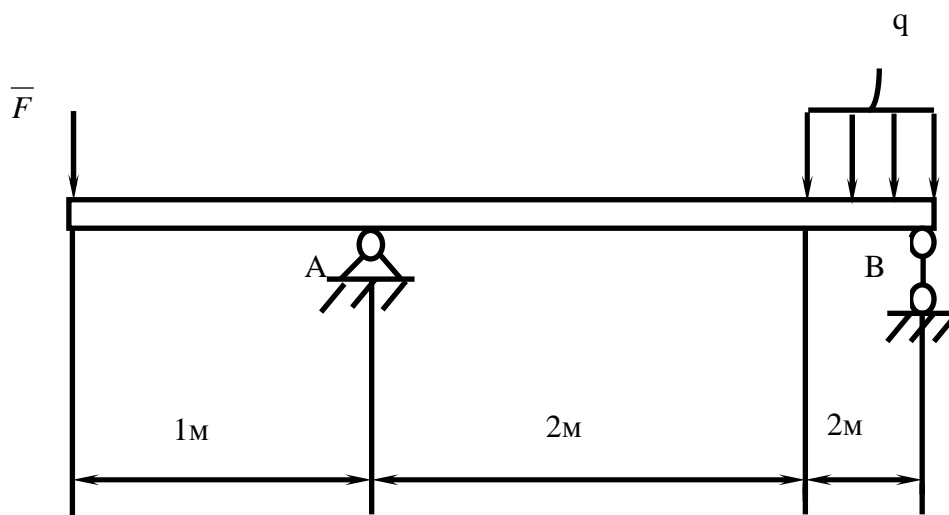


Рисунок 2.7

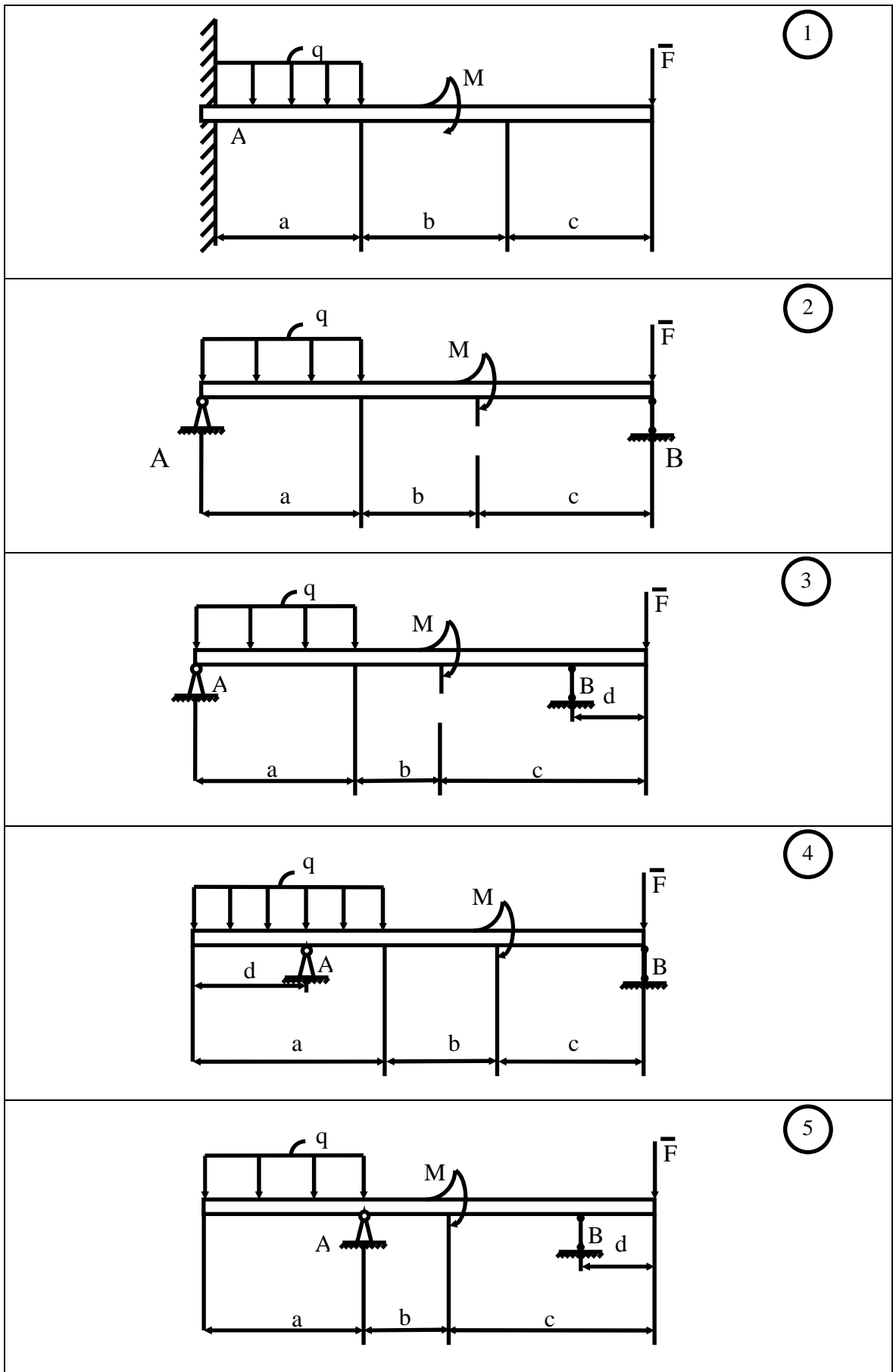


Рисунок 2.1

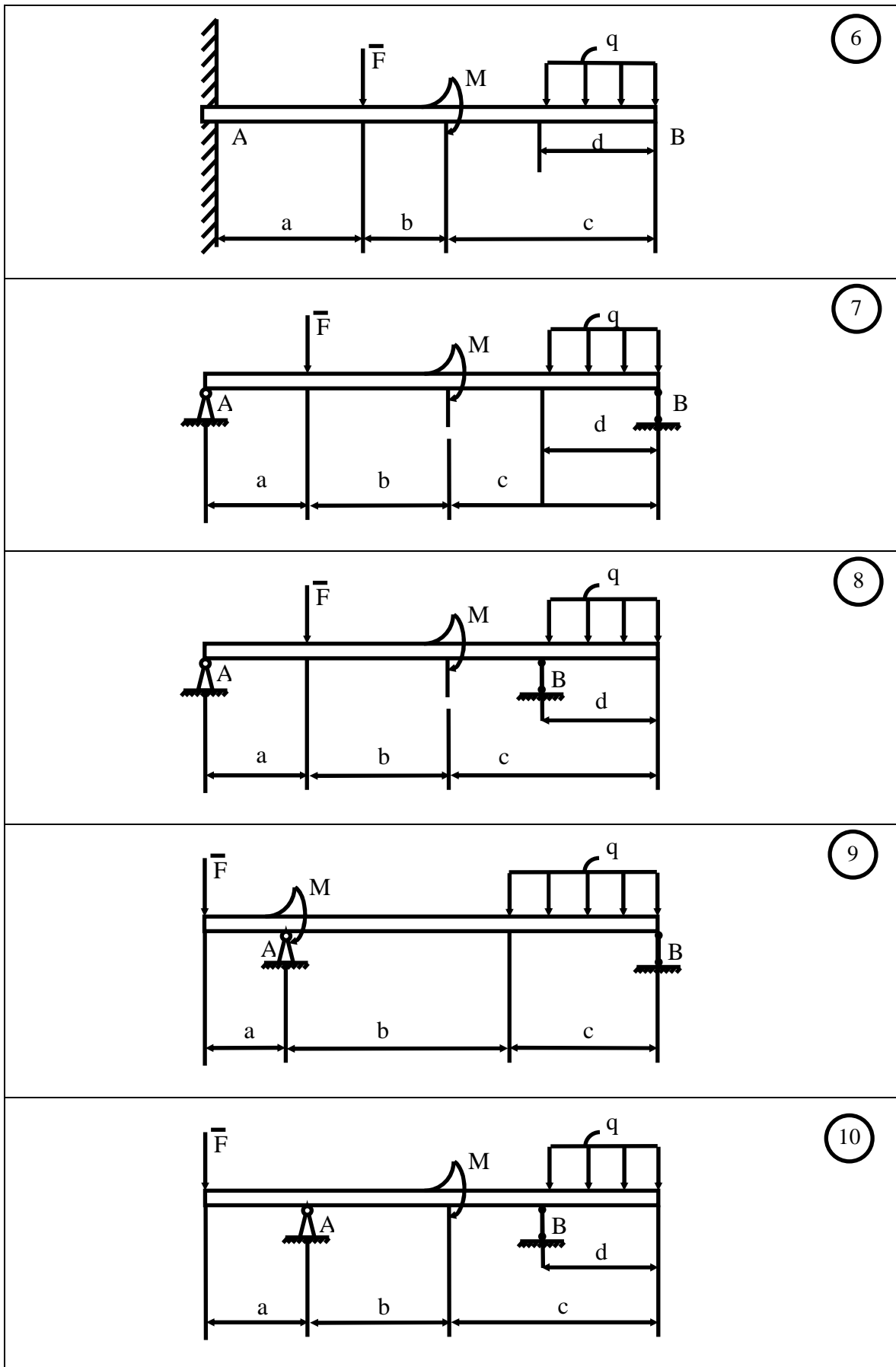


Рисунок 2.2

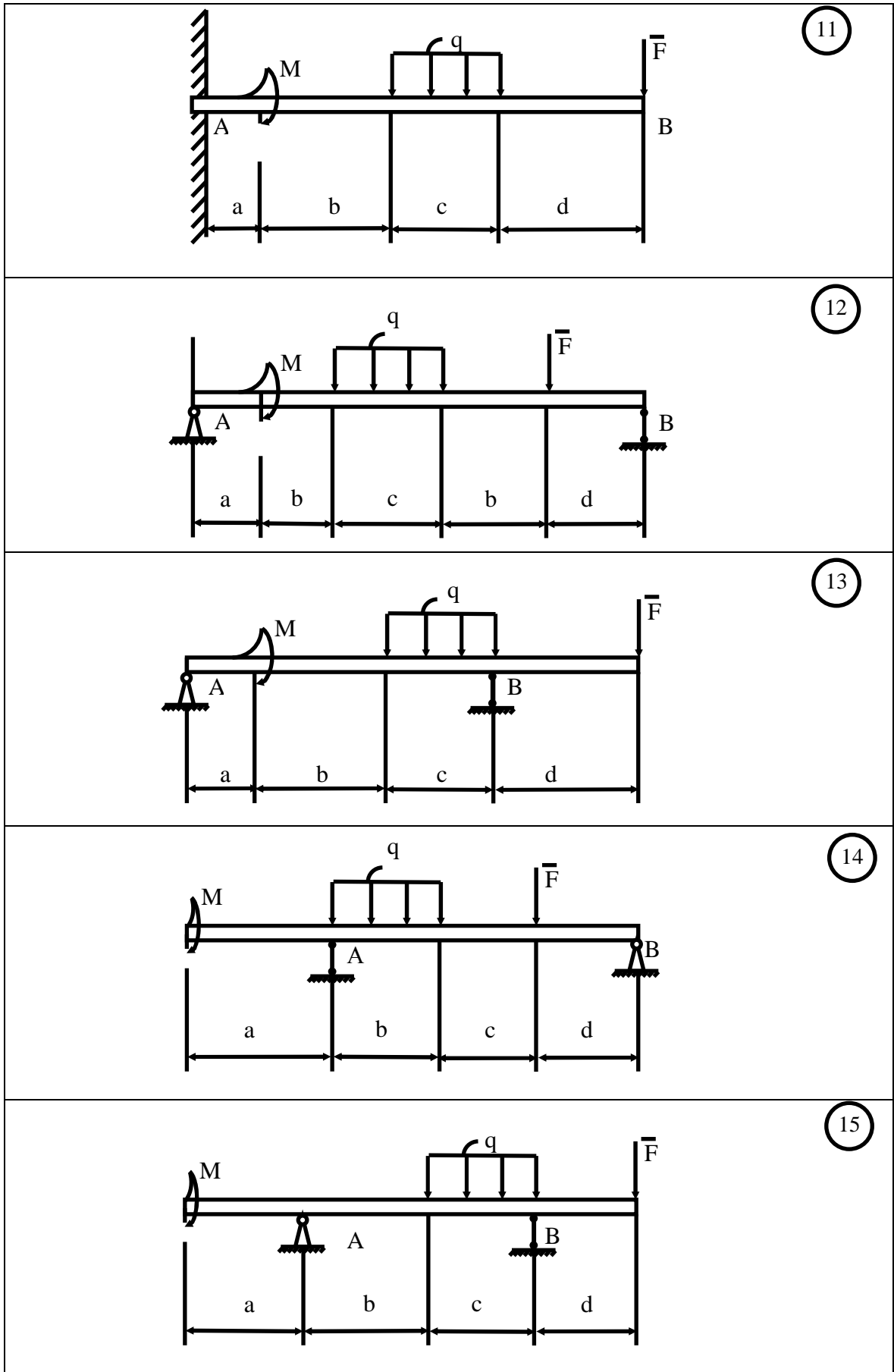


Рисунок 2.3

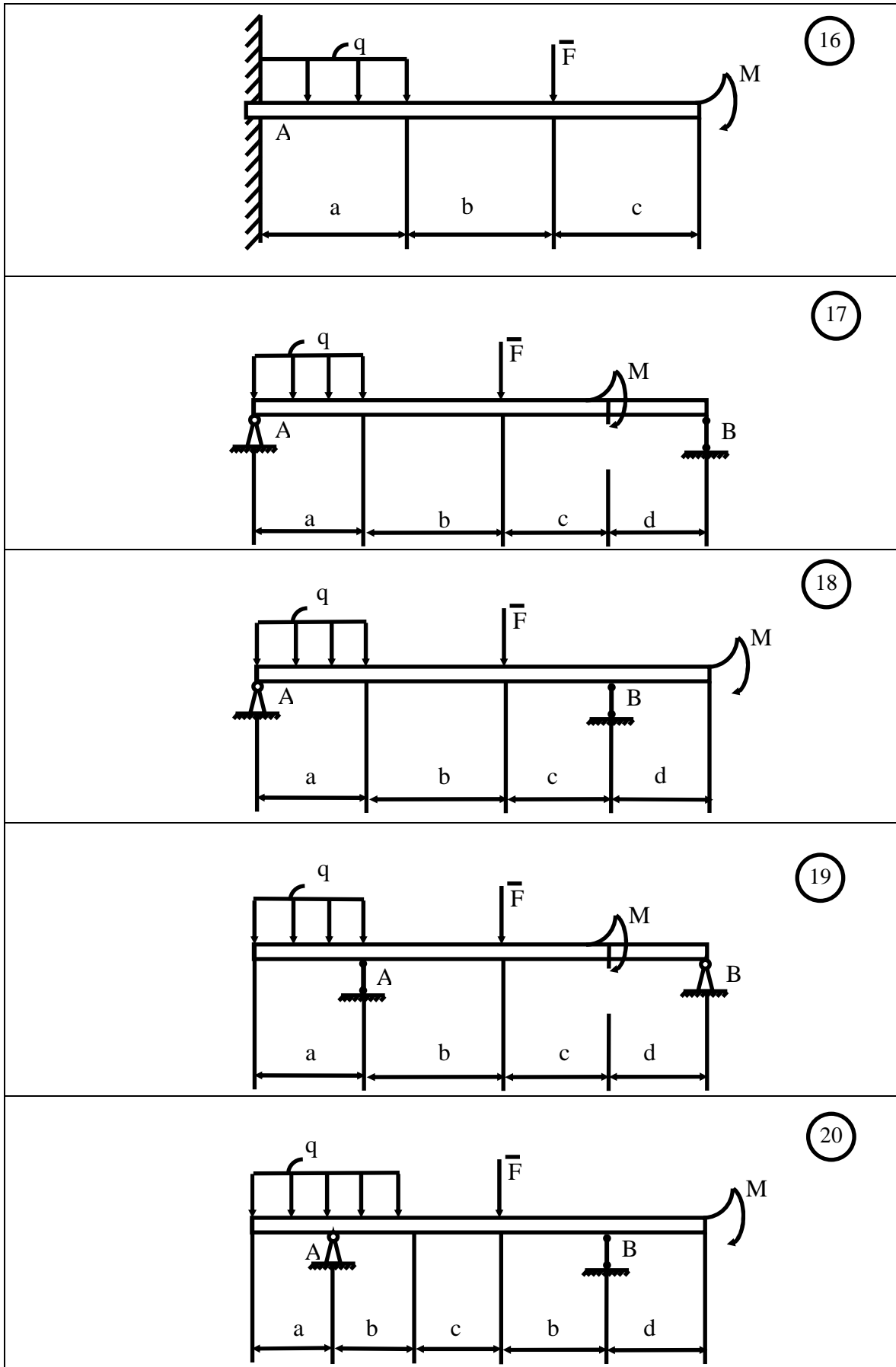


Рисунок 2.4

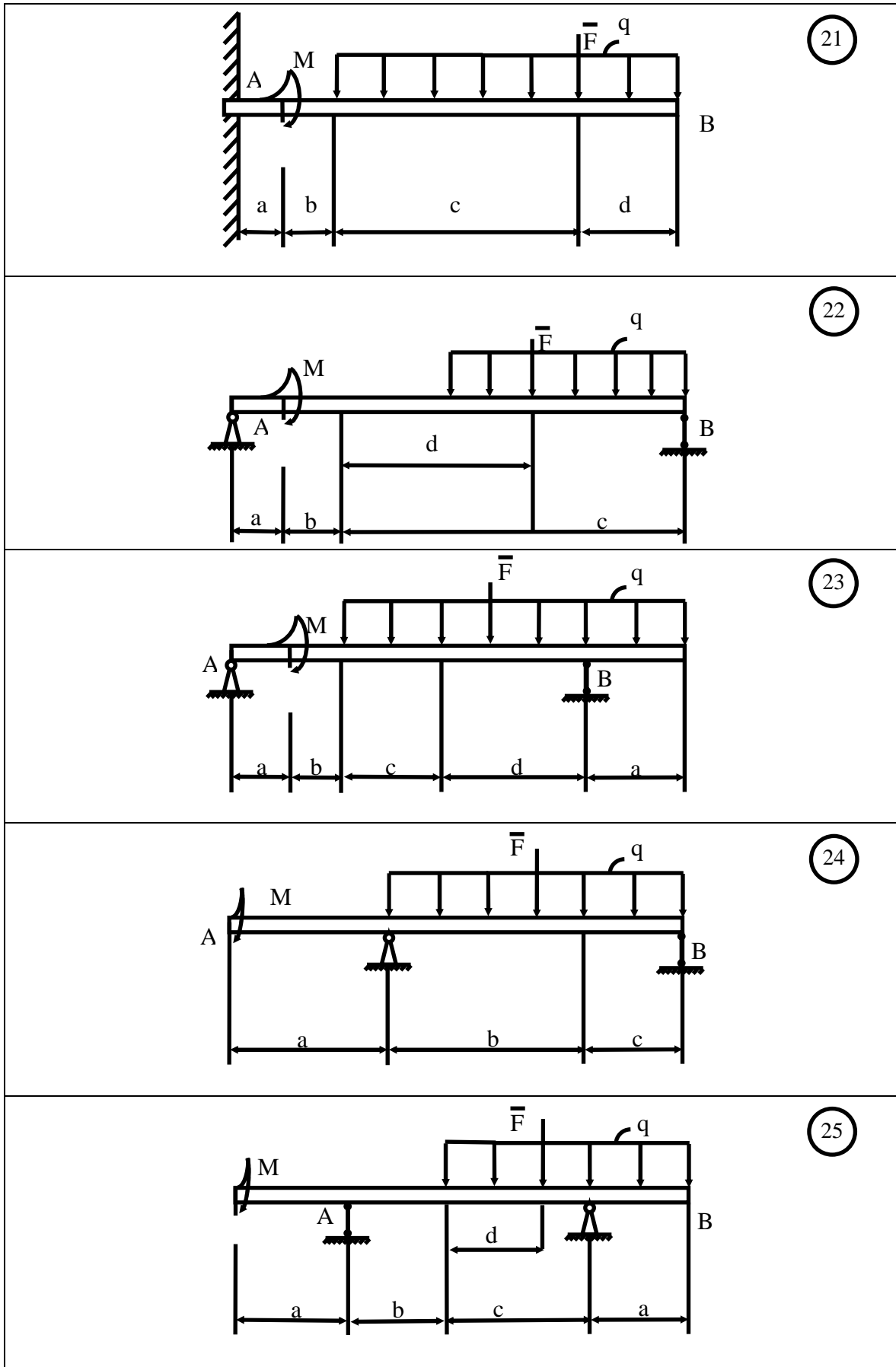


Рисунок 2.5

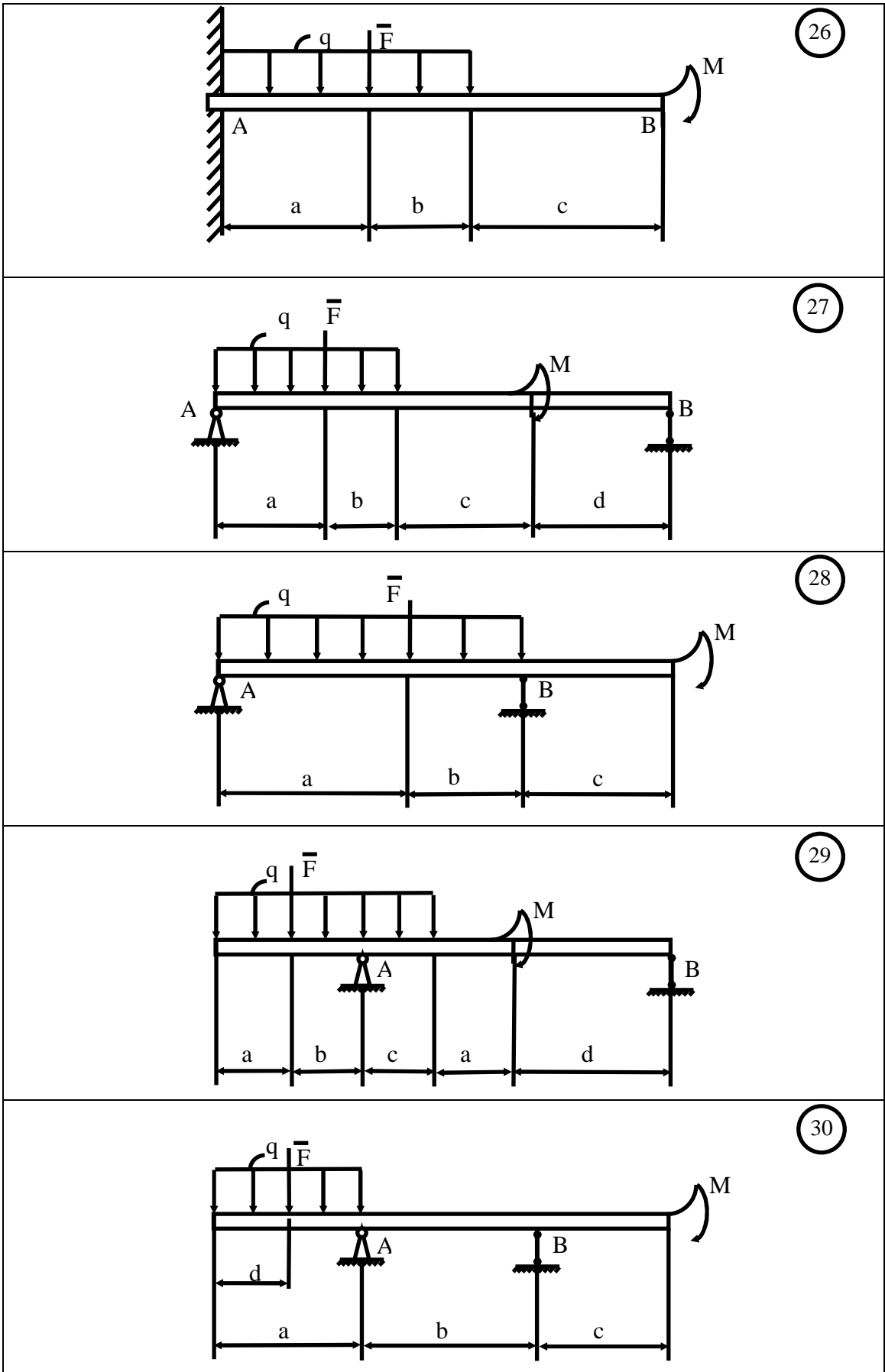


Рисунок 2.6

Розв'язання. Розглянемо балку АВ, що знаходиться у рівновазі (спокої).

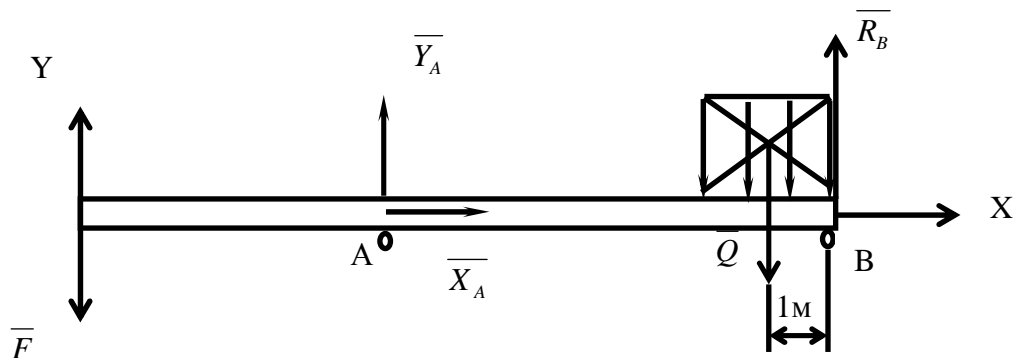


Рисунок 2.8

На балку діють активні сили: зосереджена сила \bar{F} та розподілене навантаження інтенсивністю q , яке еквівалентне зосередженій силі \bar{Q}

$$Q = q \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН.}$$

Дію циліндричного шарніра А та рухомого В замінюємо їх реакціями $\bar{Y}_A, \bar{X}_A, \bar{R}_B$ (рис. 2.8) Для врівноваженої системи сил $\{\bar{F}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Q}, \bar{R}_B\} \neq 0$ запишемо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; \quad X_A = 0, \\ \sum m_A \bar{F} &= 0; \quad F \cdot 1 - Q \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0, \\ \sum m_B \bar{F} &= 0; \quad F \cdot 5 - Y_A \cdot 4 + Q \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Звідки отримуємо: $R_B = 0,75 \text{ кН}$, $Y_A = 4,25 \text{ кН}$, $X_A = 0$.

Достовірність отриманих результатів можна перевірити записавши ще одне рівняння:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0; \quad -F + Y_A - Q + R_B = 0, \\ -3 + 4,25 - 2 + 0,75 &= 0. \end{aligned}$$

Відповідь: $R_B = 0,75 \text{ кН}$; $Y_A = 4,25 \text{ кН}$; $X_A = 0$.

Приклад 2: Для консольної балки (рис. 2.9) знайти реакції жорсткого защемлення, якщо $F = 2 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

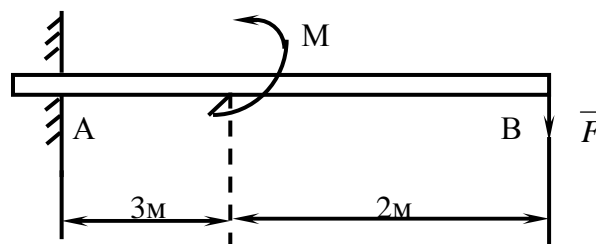


Рисунок 2.9

Розв'язання: На балку AB діють: активна сила F , пара сил з моментом M ; її руху перешкоджає в'язь – жорстке защемлення в точці A . Відкидаємо в'язь в точці A , і на підставі аксіоми звільнення від в'язей, її дію замінюємо силами $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ та моментом M_A (рис. 2.10).

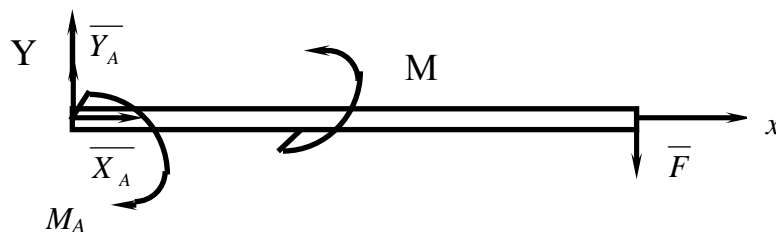


Рисунок 2.10

Запишемо умови рівноваги для системи сил $\{\overline{X}_A, \overline{Y}_A, M_A, M, \overline{F}\}_{\infty} = 0$.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; X_A = 0; \\ \sum F_y &= 0; Y_A - F = 0; \\ \sum m_A \overline{F} &= 0; -M_A + M - F \cdot 5 = 0. \end{aligned}$$

Звідки знаходимо:

$$\begin{aligned} Y_A &= F = 2\text{кН}, \\ M_A &= M - 5 \cdot F = 5 - 5 \cdot 2 = -5\text{кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Відповідь: $X_A = 0; Y_A = 2\text{кН}; M_A = -5\text{кН} \cdot \text{м}$.

С.3 Плоска довільна система сил

Плоска рама (рис. 3.1 – 3.5) знаходиться під дією сил F_1, F_2 і пари сил з моментом M . Напрямок сил визначається кутами β і φ , а геометричні розміри параметрами a, b, c, d , і h .

Рама закріплена до нерухомої основи за допомогою плоского шарніра A , а в точці B тонким стержнем.

Дані для розрахунків знаходяться в таблиці 3.1, де сили мають розмірність в Н , момент – в $\text{Н} \cdot \text{м}$, розміри в метрах, кути в градусах.

Для заданої конструкції рами, при умові її рівноваги, знайти опорні реакції, побудувати графіки залежностей цих реакцій від змінного кута, який помічений в таблиці 3.1 зірочкою (*). Вказати значення змінного кута з точністю до одного градуса при якому модулі опорних реакцій мають найбільші і найменші значення.

Таблиця 3.1

Варі-ант	F_1	F_2	M	a	b	c	d	h	φ	β
1	15	20	64	6	3	4	2	3	*	30
2	18	12	24	5	8	3	3	2	60	*
3	10	16	36	4	3	6	2	3	*	45
4	20	15	40	3	2	6	8	1	15	*
5	14	22	48	9	5	3	2	4	*	20
6	16	20	76	5	7	4	2	3	75	*
7	12	10	32	4	6	8	3	2	*	45
8	20	16	22	8	4	6	4	2	30	*
9	14	15	38	4	7	5	2	6	*	15
0	10	18	80	3	3	8	5	6	20	*

3.1 Приклад виконання завдання

Плоска рама, що зображена на рис. 3.6 знаходиться в рівновазі під дією сил $F_1=10$ Н, $F_2=20$ Н і пари сил з моментом $M=60$ кН. Кут $\varphi=30^\circ$, кут $\gamma=0^\circ-360^\circ$. Розміри мають значення: $a=5$ м, $b=8$ м, $c=3$ м. Опорами рами є: в точці А - нерухомий плоский шарнір, в точці В - рухома опора.

Знайти реакції опор А і В, а також побудувати графіки залежностей цих реакцій від значення змінного кута. Вказати при яких кутах γ реакції мають екстремальне значення.

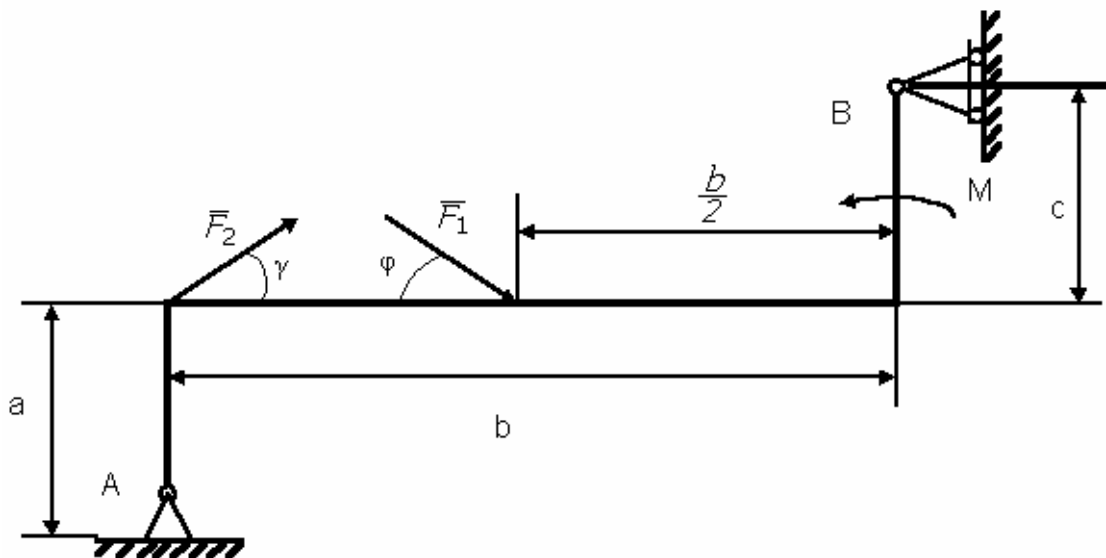


Рисунок 3.6

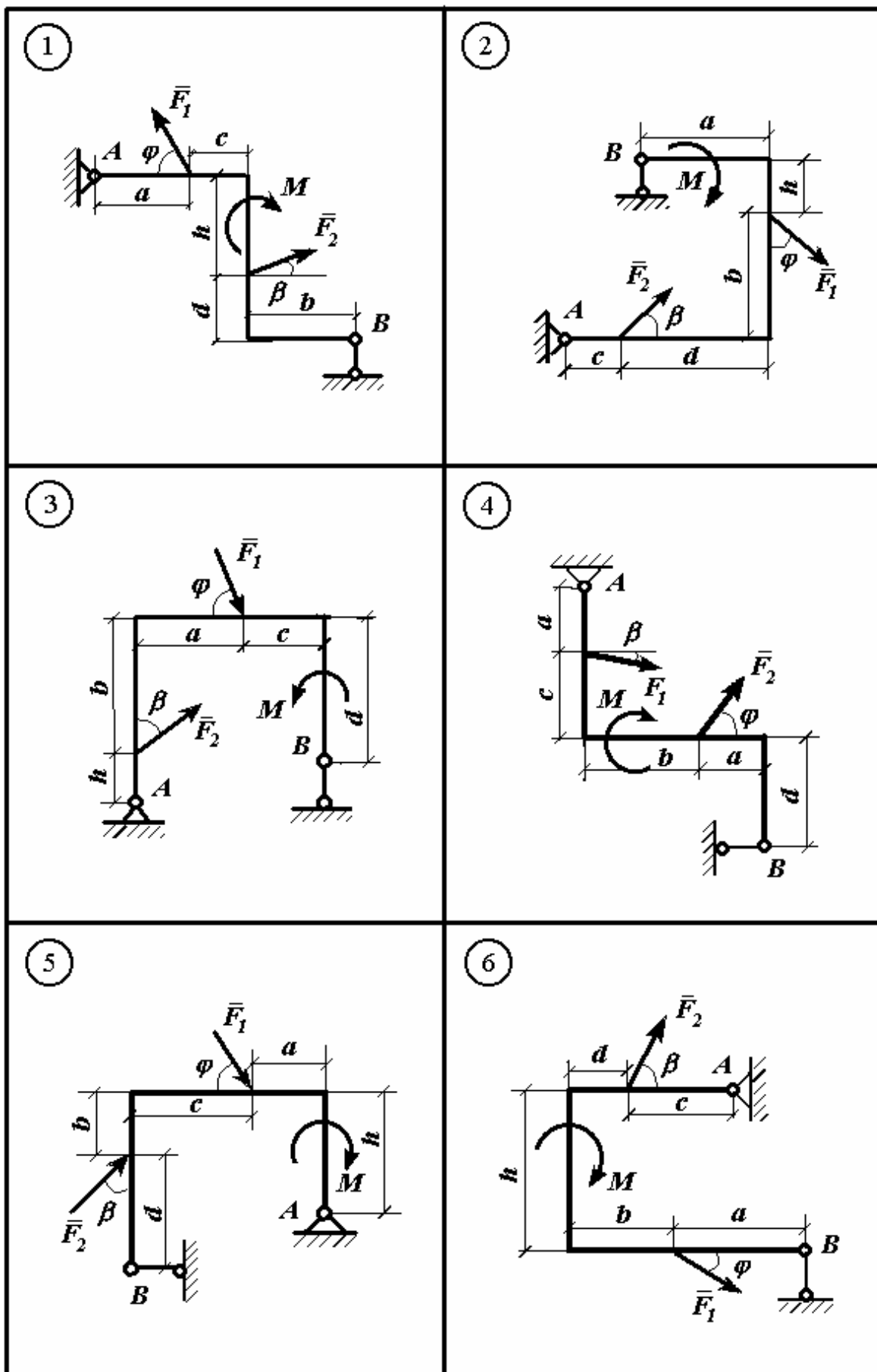


Рисунок 3.1

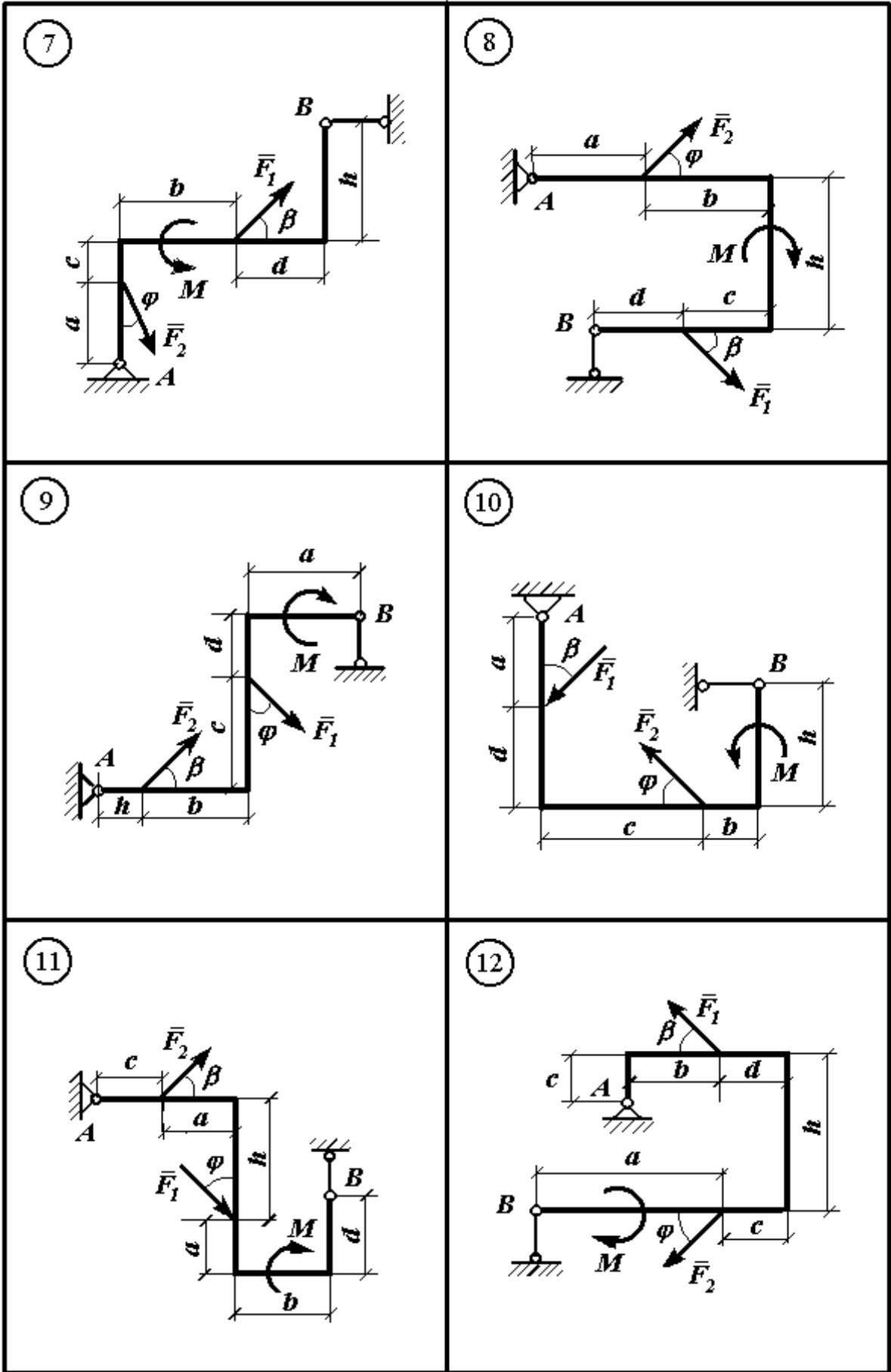


Рисунок 3.2

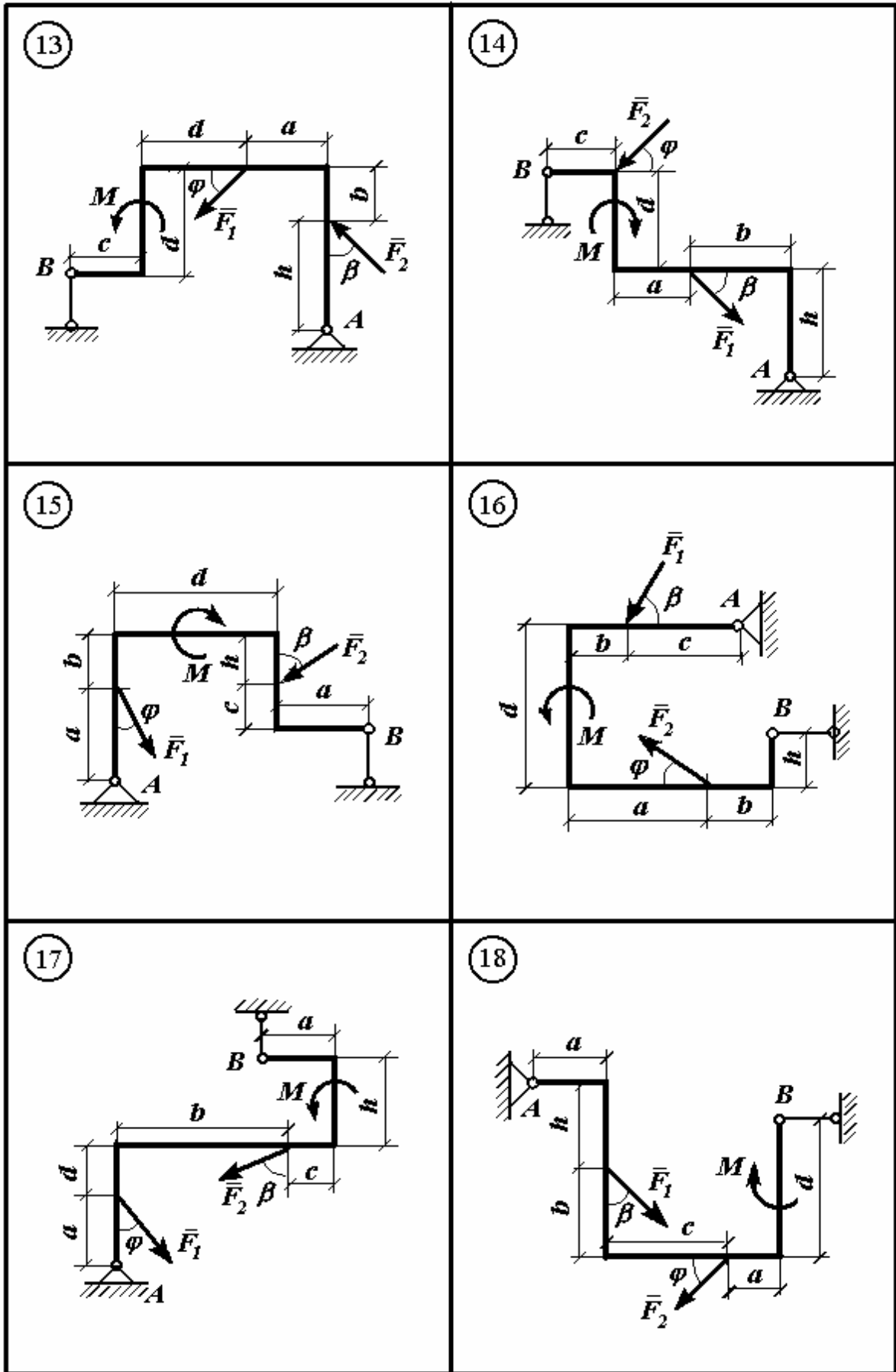


Рисунок 3.3

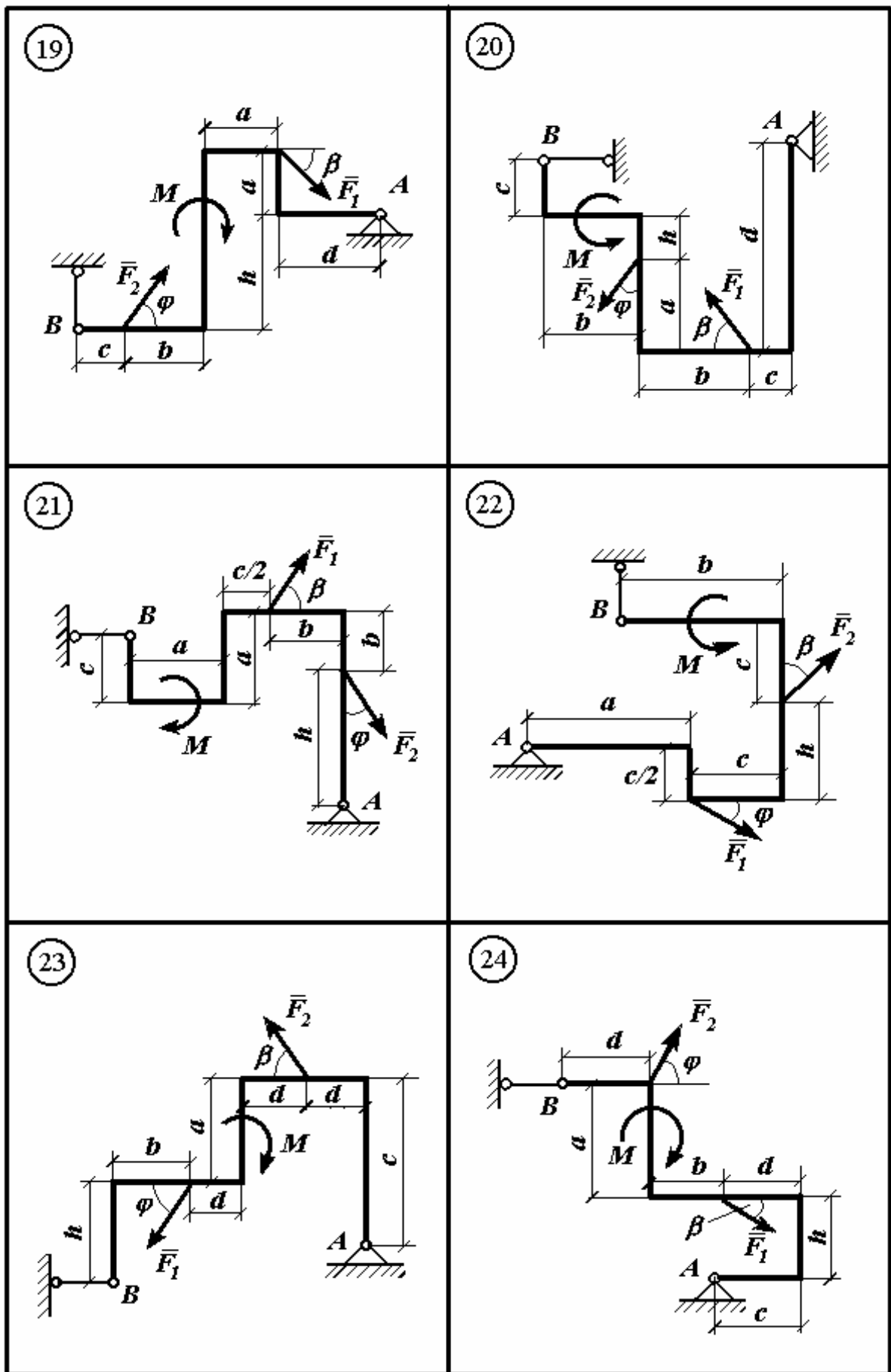


Рисунок 3.4

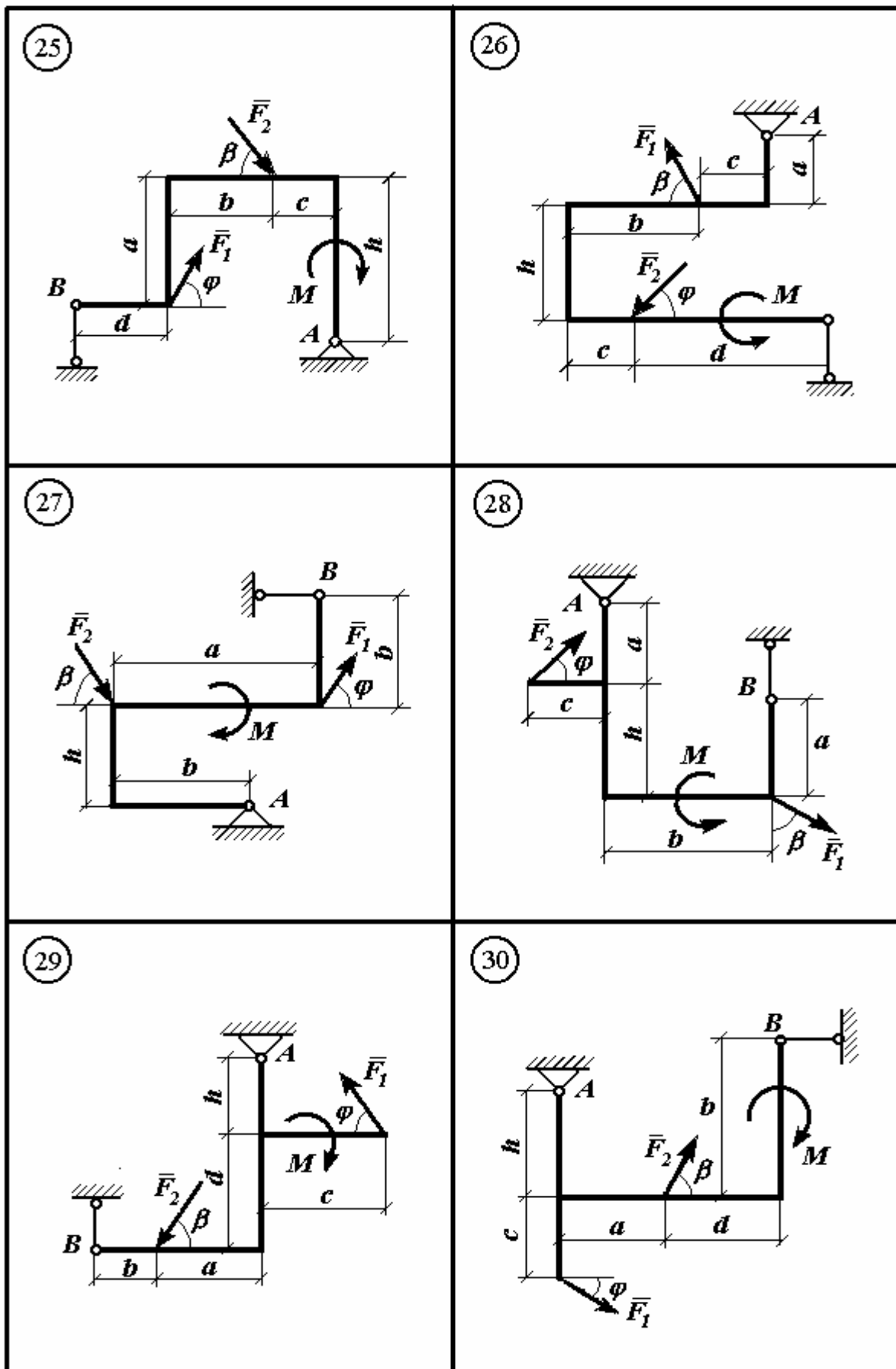


Рисунок 3.5

Розв'язання. Розташовуємо задану раму в системі координат з початком в точці А, як показано на рис. 3. 7. Вказуємо реакції, що виникають в опорах. В точці А реакцію розкладаємо на складові X_A і Y_A , а в точці В реакція R_B направлена перпендикулярно до опорної площини.

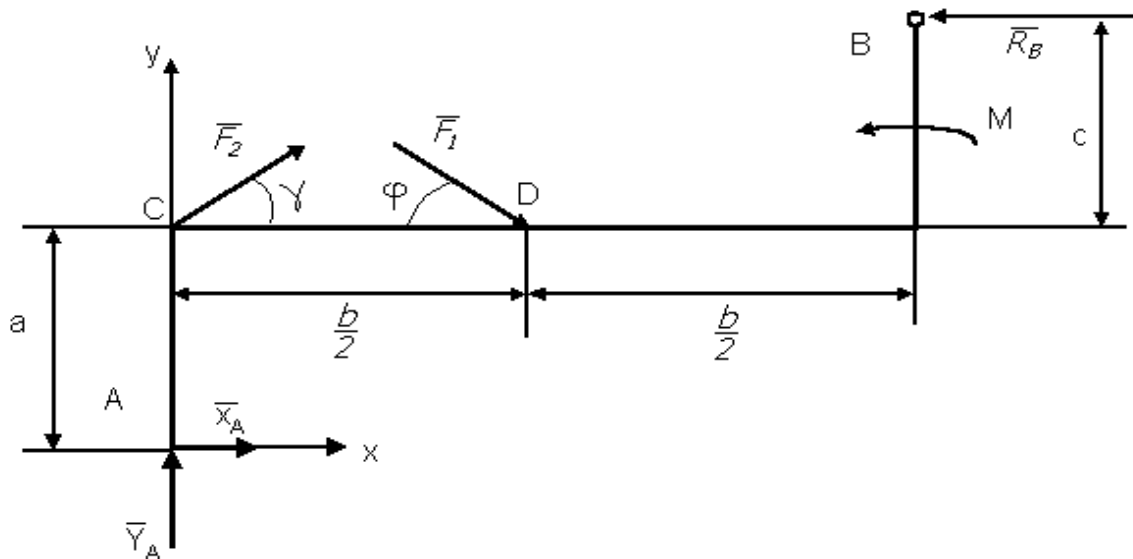


Рисунок 3.7

Складаємо рівняння рівноваги для плоскої довільної системи сил :

$$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma M_{A_i} = 0,$$

$$\Sigma X_i = X_A + F_2 \cos \gamma + F_1 \cos \varphi - R_B = 0, \quad (3.1)$$

$$\Sigma Y_i = Y_A + F_2 \sin \gamma - F_1 \sin \varphi = 0, \quad (3.2)$$

$$\Sigma M_{A_i} = - F_2 a \cos \gamma - F_1 a \cos \varphi - F_1 (b / 2) \sin \varphi + M + R_B (a + c) = 0. \quad (3.3)$$

З рівняння (3.2) знаходимо Y_A

$$Y_A = F_1 \sin \varphi - F_2 \sin \gamma. \quad (3.4)$$

З рівняння (3.3) знаходимо R_B

$$R_B = (F_2 a \cos \gamma + F_1 a \cos \varphi + F_1 (b / 2) \sin \varphi - M) / (a + c). \quad (3.5)$$

З рівняння (3.1) знаходимо X_A

$$X_A = R_B - F_2 \cos \gamma - F_1 \cos \varphi. \quad (3.6)$$

Модуль реакції в точці А знаходимо за формулою :

$$R_A^2 = X_A^2 + Y_A^2. \quad (3.7)$$

Виконаємо перевірку . Задача розв'язана правильно, якщо виконується умова:

$$\Sigma M_{D_i} = 0 .$$

Складемо це рівняння , користуючись рисунком 3.7.

$$\Sigma M_{D_i} = - Y_A b / 2 + X_A a - F_2 b / 2 \sin \gamma + M + R_B c. \quad (3.8)$$

За формулами (3.4) - (3.8) складаємо програму на мові BASIC і вводимо її в ЕОМ. Далі приводиться роздрук програми "C1" і деякі результати розрахунків .

```
10 REM " C1
20 P1=3.14
30 F1=10
40 F2=20
50 M= 60
60 F1=P1/6
70 S1=SIN (F1)
80 C1=COS (F1)
90 A=5
100 B=8
110 C=3
120 FOR G=0 TO 360 STEP 30
130 S2=SIN (G*P1/180)
140 C2=COS (G*P1/180)
150 YA=F1*S1-F2*S2
160 RB= (F2*C2*A+F1*C1*A+F1*S1*B/2-M)/ (A+C)
170 XA=RB-F2*C2-F1*C1
180 RA=SQR (XA^2+YA^2)
190 MD=-YA*B/2+XA*A-F2*S2*B/2+M+RB*C
200 PRINT " -----
210 PRINT " KYT G= "G
220 PRINT "XA= "XA, "YA= "YA, "RB= "RB, "RA= "RA
230 PRINT " MD= "MD
240 NEXT G
250 END
-----
KYT G= 0
XA= -15.74924 YA= 4.997701 RB= 12.91234 RA= 16.52319
```

MD= -7. 629395E-06

KYT G= 30
XA= -14.74543 YA= -4. 997701 RB= 11.23932 RA= 15. 56935
MD= 3. 814697E-06

KYT G= 330
XA= -14.73346 YA= 15.04823 RB= 11.21936 RA= 21.06001
MD= -1.144409E-05

KYT G=360
XA= -15. 74921 YA= 5. 061403 RB= 12. 91228 RA= 16. 54253
MD= -1. 525879E-05

За одержаними даними будемо графік залежностей опорних реакцій від кута γ . Залежності $R_A(\gamma)$ і $R_B(\gamma)$ зображено на рис .3.8 , де відмічені максимальні та мінімальні значення .

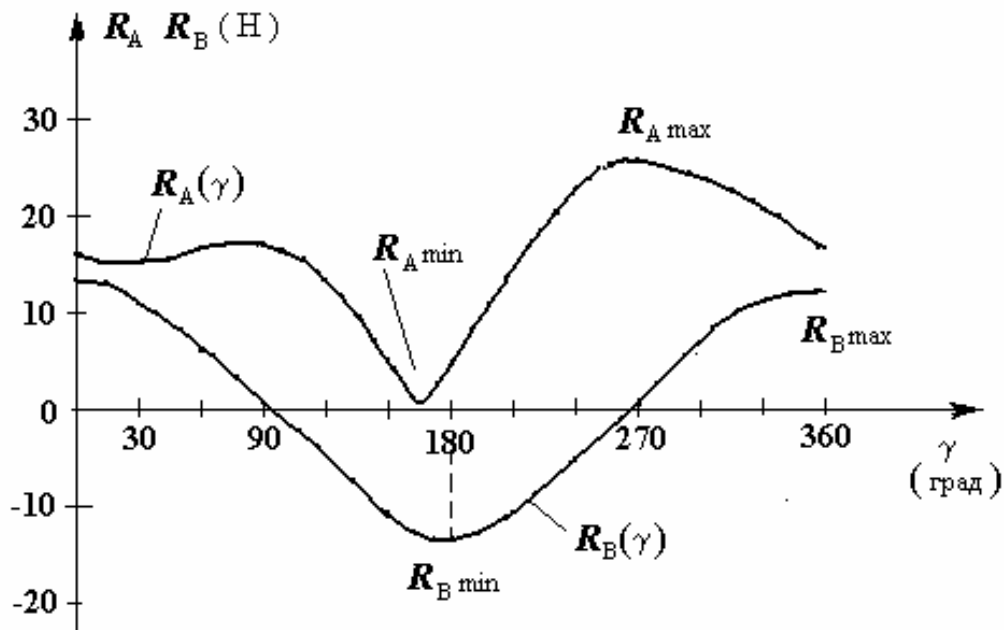


Рисунок 3.8

Для того , щоб визначити значення кута з точністю до одного градуса в екстремальних точках , потрібно в програмі “ С 1 “ в стрічці оператора цикла під номером 120 задати крок рівний одиниці .

Аналіз показує , що :

$$\begin{aligned} R_A &= R_{A \max} = 26,487 \text{ Н} && \text{при } \gamma = 248^\circ , \\ R_A &= R_{A \min} = 0,983 \text{ Н} && \text{при } \gamma = 166^\circ , \\ R_B &= R_{B \max} = 12,910 \text{ Н} && \text{при } \gamma = 0^\circ , \\ R_B &= R_{B \min} = -12,087 \text{ Н} && \text{при } \gamma = 180^\circ . \end{aligned}$$

С.4 Розрахунок та дослідження плоскої ферми

Плоска ферма (рис. 4.1. – 4.10.) перебуває під впливом активних зовнішніх навантажень $P_{i(1..5)}$, які прикладені до вузлів, напрям яких вказується кутами α_j ($j=1,2..5$). Геометричний розмір ферми визначається величинами $a_1, a_2, b_1, b_2, h_1, h_2$.

Значення сил P_i , кутів α_j та геометричні розміри наведено в табл. 4.1. Один із кутів α_j є змінною величиною (його позначено символом “*”) в межах від нуля до 360° .

Таблиця 4.1

Варі- ант	Сила, кН					Розміри, м						Кут, град.					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	a_1	a_2	b_1	b_2	h_1	h_2	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	β
1	2	5	7	0	0	3	3	3	3	4	0	*	30	45			0
2	3	0	0	4	3	4	4	2	2	4	4	30	*		*	60	30
3	4	3	0	0	5	2	2	2	2	2	2	*	60			90	0
4	5	4	0	6	0	5	0	4	5	5	4	45	45		*		60
5	6	0	0	4	2	8	5	2	2	6	1	60			*	30	45
6	7	1	0	0	1	2	2	3	3	2	2	*	45			30	30
7	8	0	0	2	0	2	2	1	1	2	1	*			60	45	0
8	9	0	4	2	0	1	1	3	3	3	2	*		45	30		0
9	10	5	6	0	0	3	3	1	1	2	2	60	45	*			0
0	4	1	0	2	2	0	3	2	2	1	3	30	45		*		30

Залежно від змінного кута (в таблиці 4.1 помічено (*)) з кроком 30° знайти:

а) опорні реакції ферми;

б) зусилля в стержнях ферми методом вирізання вузлів при зафіксованому значенні змінного кута:

1) побудувати діаграму Максвелла-Кремони;

2) перевірити зусилля в трьох стержнях методом Ріттера;

3) знайти відносну похибку обчислень між аналітичними та гріфічним методами.

4.1 Приклад виконання завдання

Ферма (рис.4.11) перебуває під дією зовнішніх сил $P_1 \dots P_5$, напрям яких вказується за допомогою кутів $\alpha_1 \dots \alpha_5$. Геометричні розміри ферми та сили приведені в таблиці 4.2, кут α_3 – змінний.

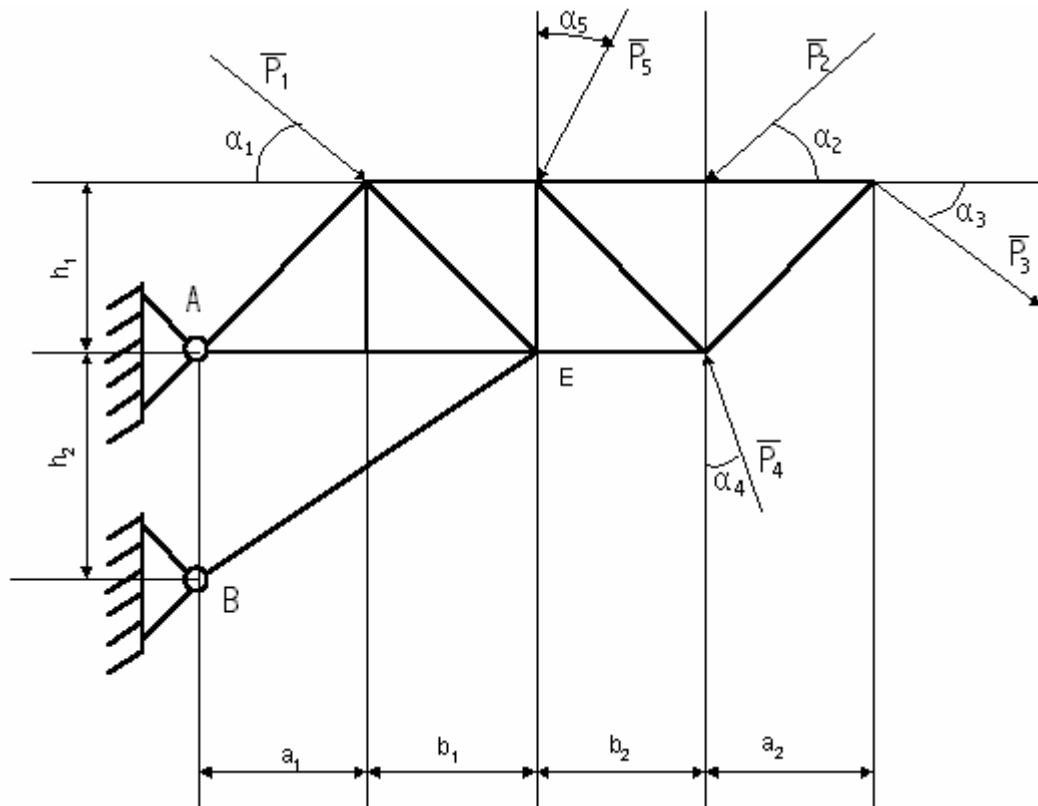


Рисунок 4.11

Таблиця 4.2

P_1	P_2	P_3	a_1	a_2	b_1	b_2	h_1	h_2	α_1	α_2	α_3	P_4	P_5	α_4	α_5
3	5	6	3	3	3	3	3	6	0	90	*	0	0	–	–

Визначити:

- опорні реакції аналітичним і графічним способами;
- зусилля в стержнях ферми методом вирізання вузлів (роз'язок перевірити аналітично);
- перевірити значення зусиль у стержнях двох середніх панелей методом Ріттера при $\alpha_3 = 30^\circ$;
- зусилля для всіх стержнів ферми за допомогою діаграми Максвелла – Кремони; значення опорних реакцій та зусилля в стержнях ферми при $\alpha = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, 360^\circ$;

дослідити на екстремум та побудувати графік зусилля одного з вибраних стержнів, як функцію змінного кута α_3 .

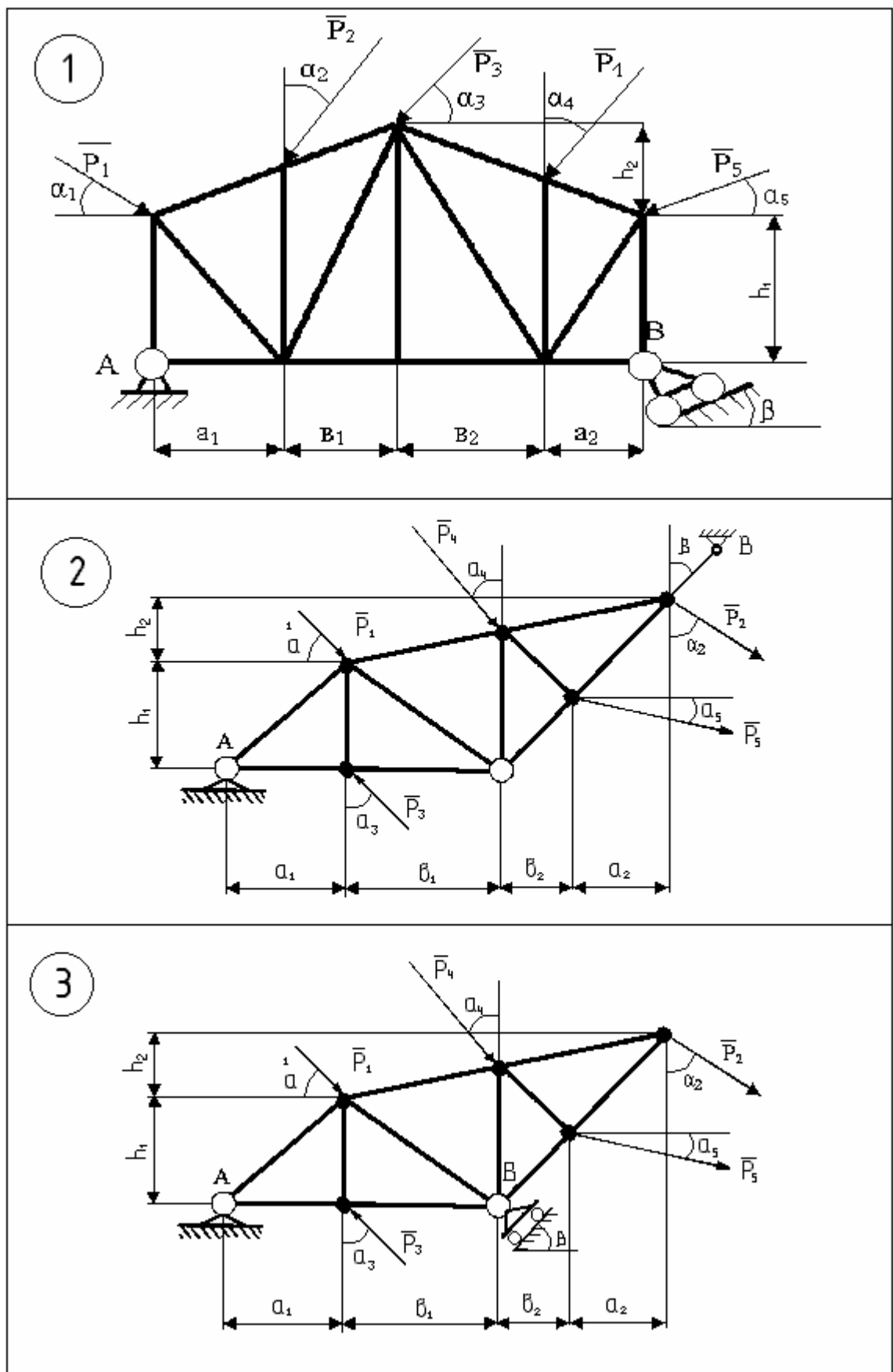


Рисунок 4.1

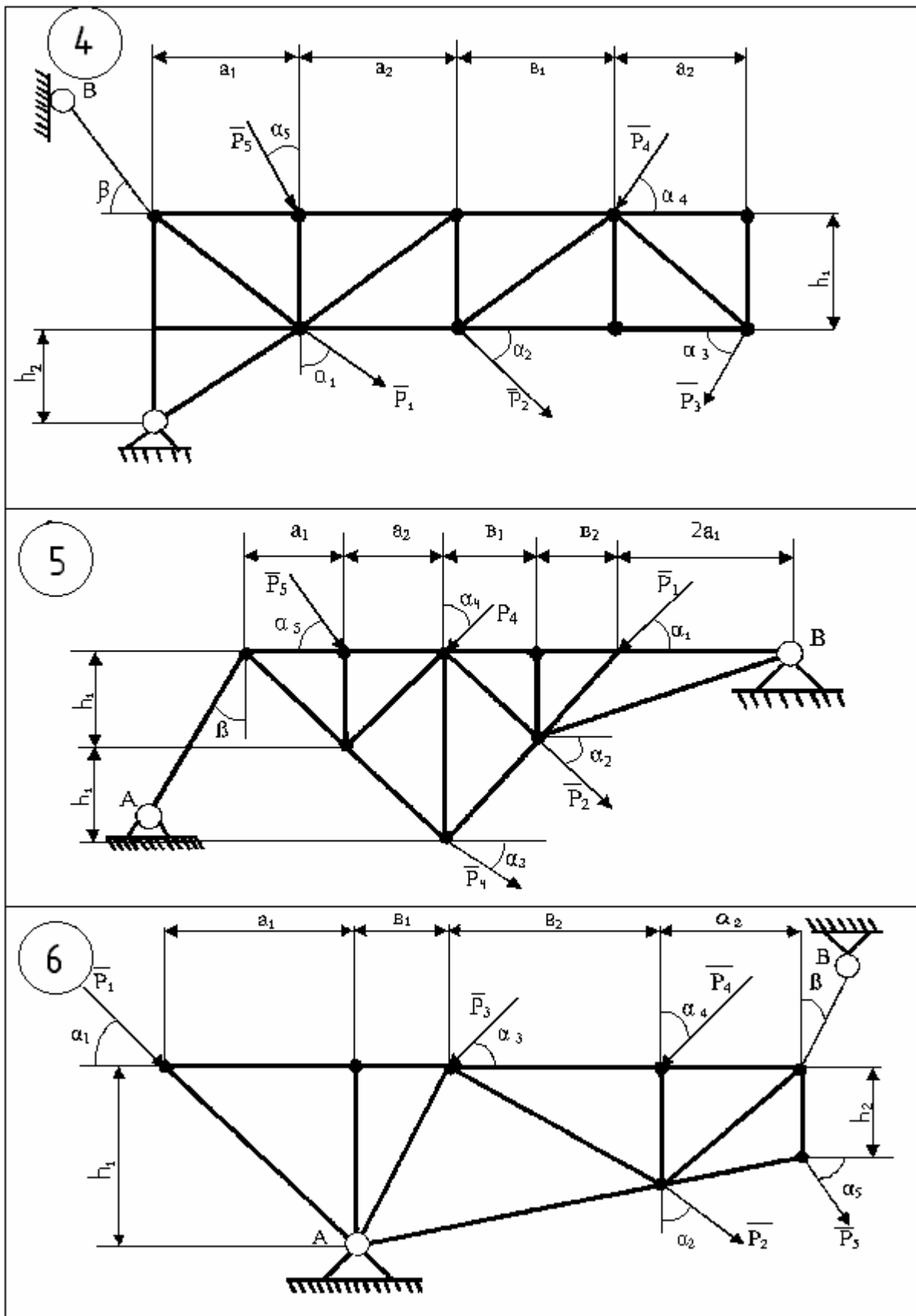


Рисунок 4.2

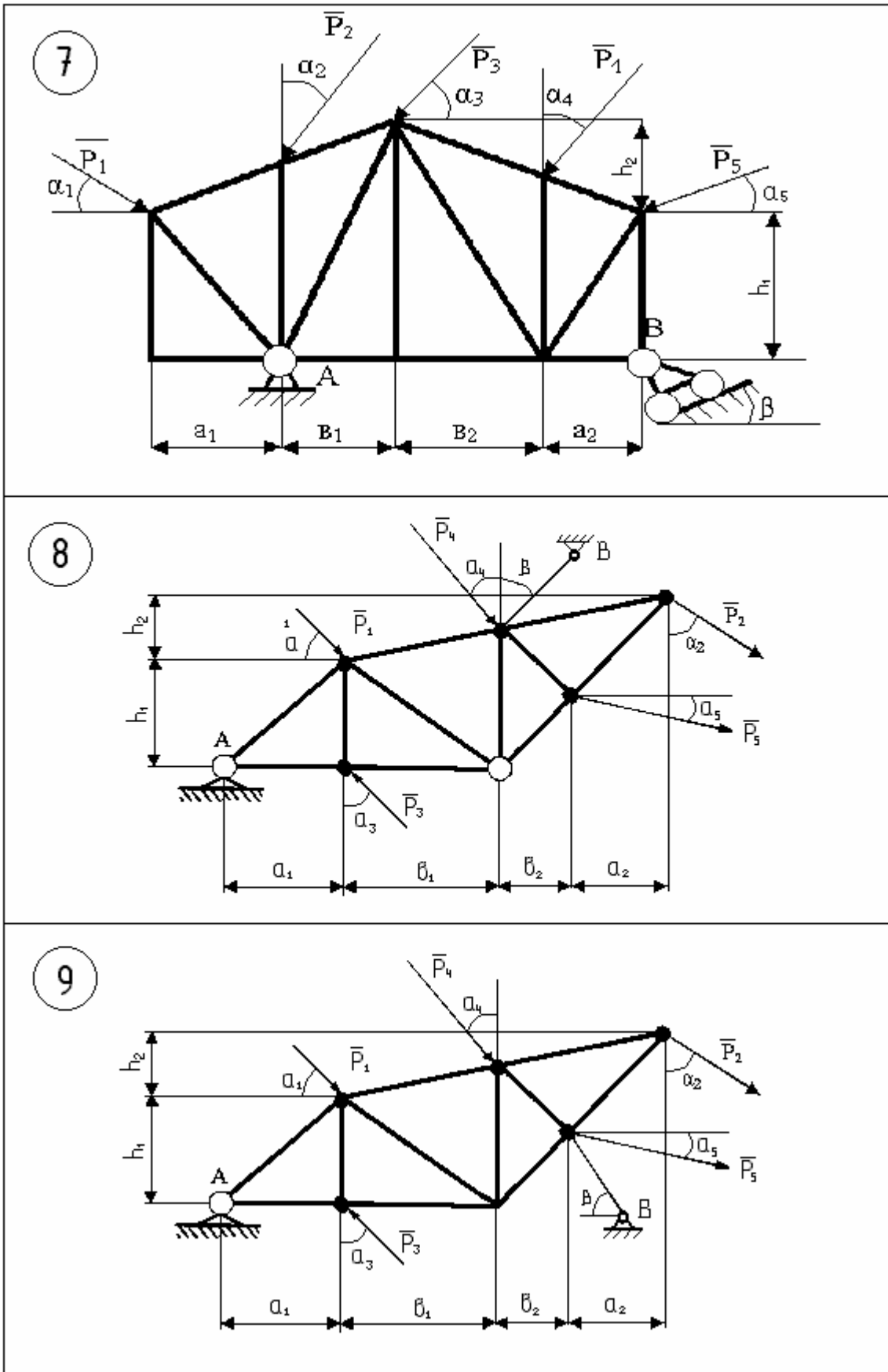


Рисунок 4.3

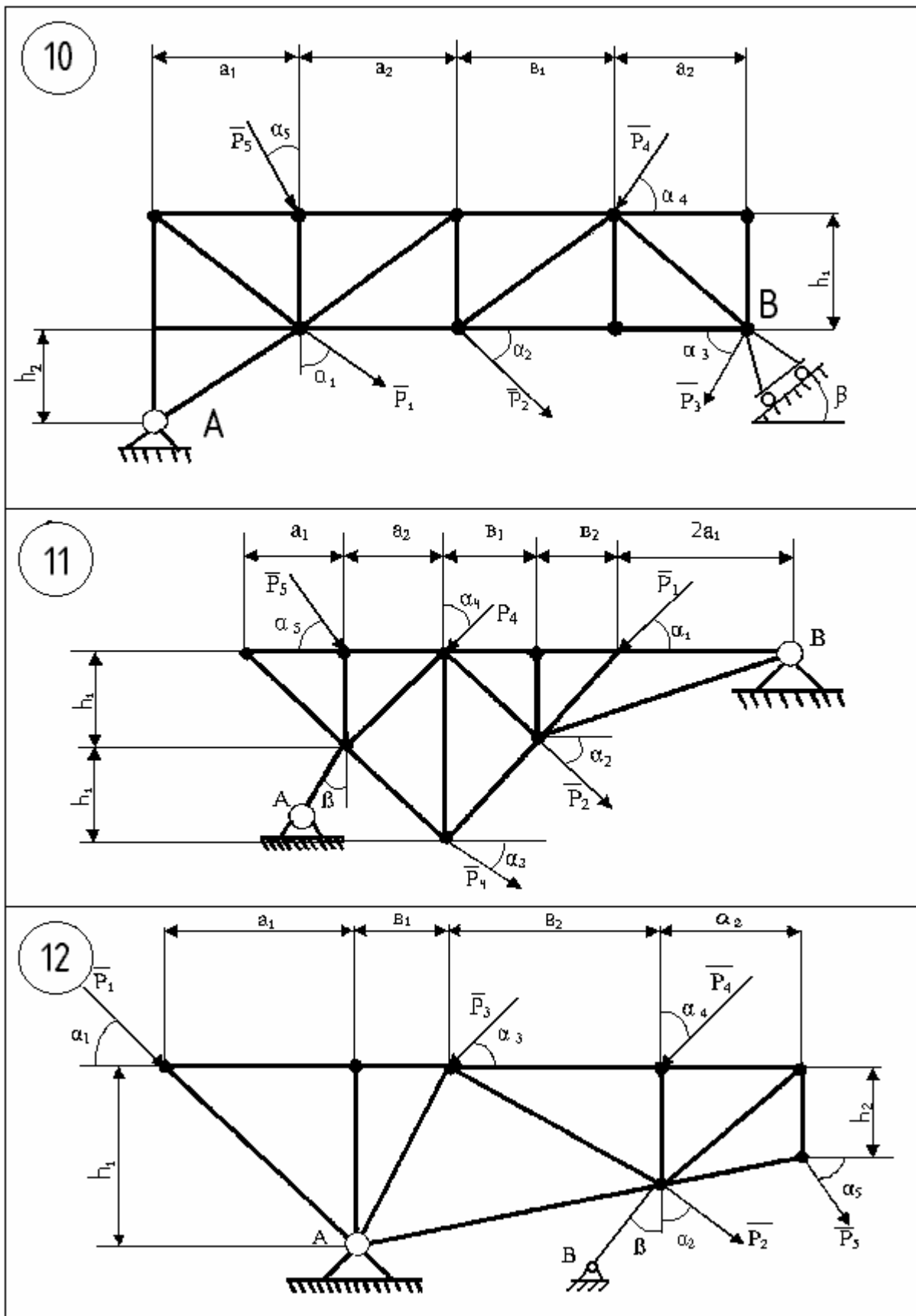


Рисунок 4.4

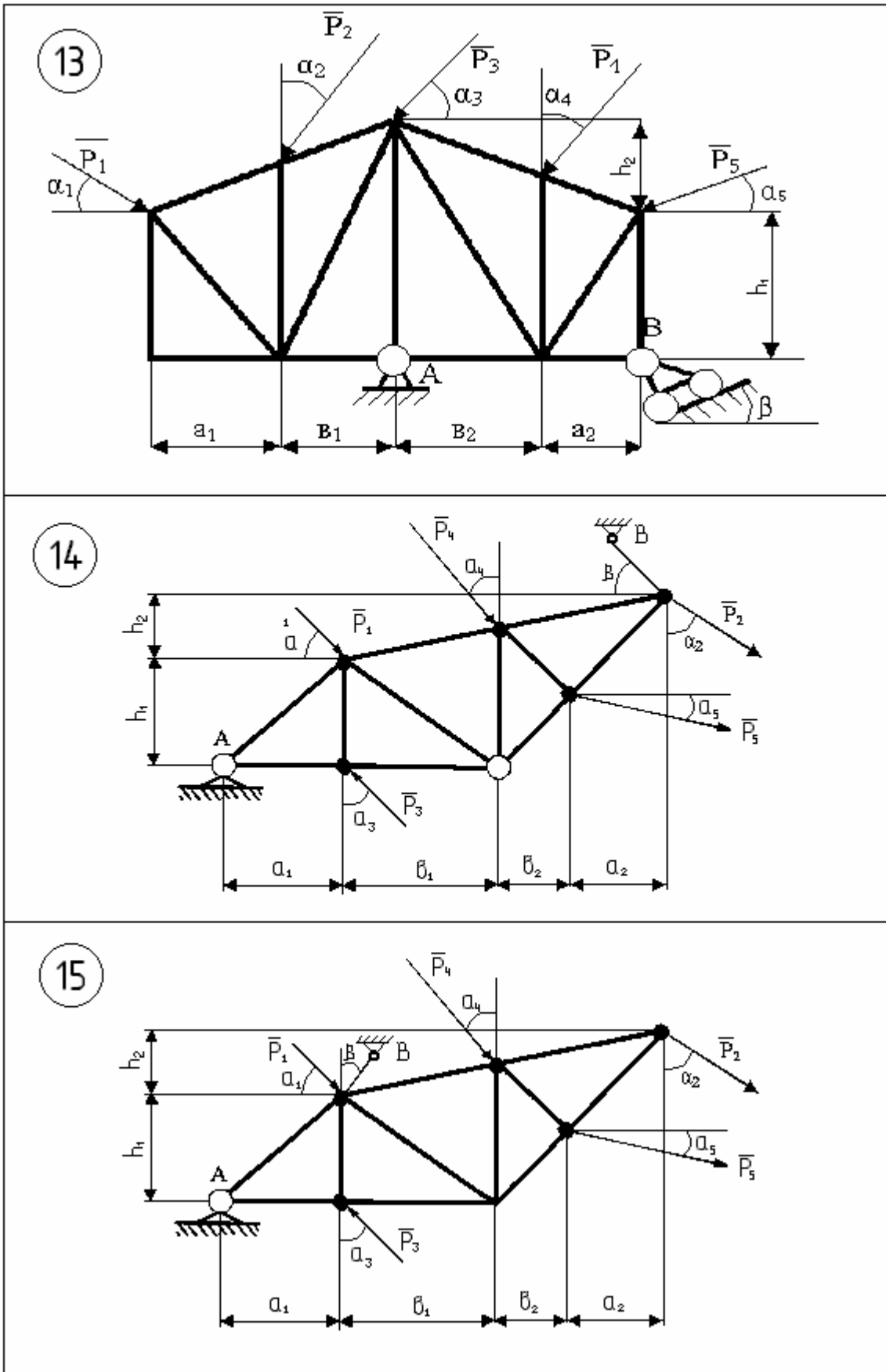


Рисунок 4.5

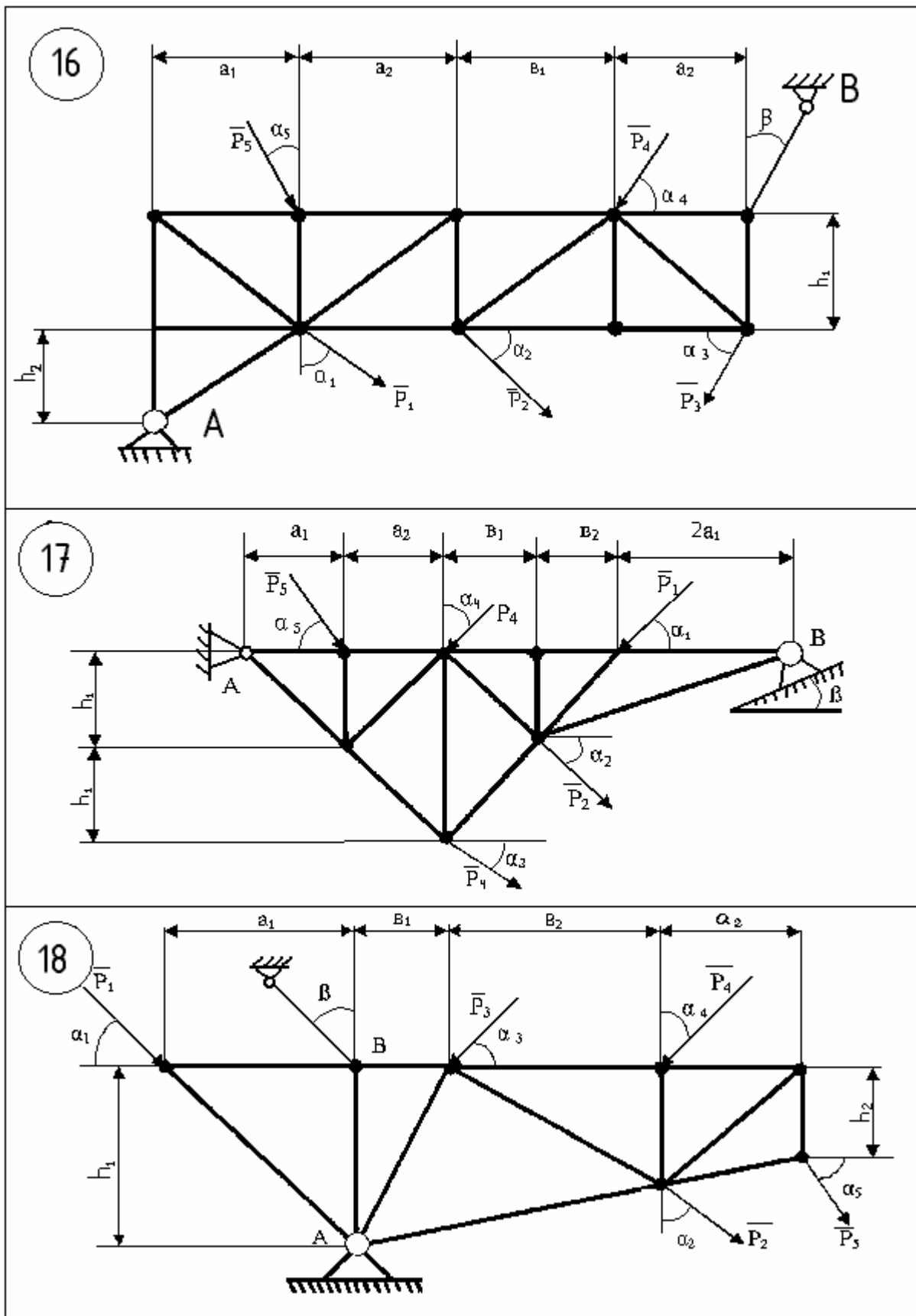


Рисунок 4.6

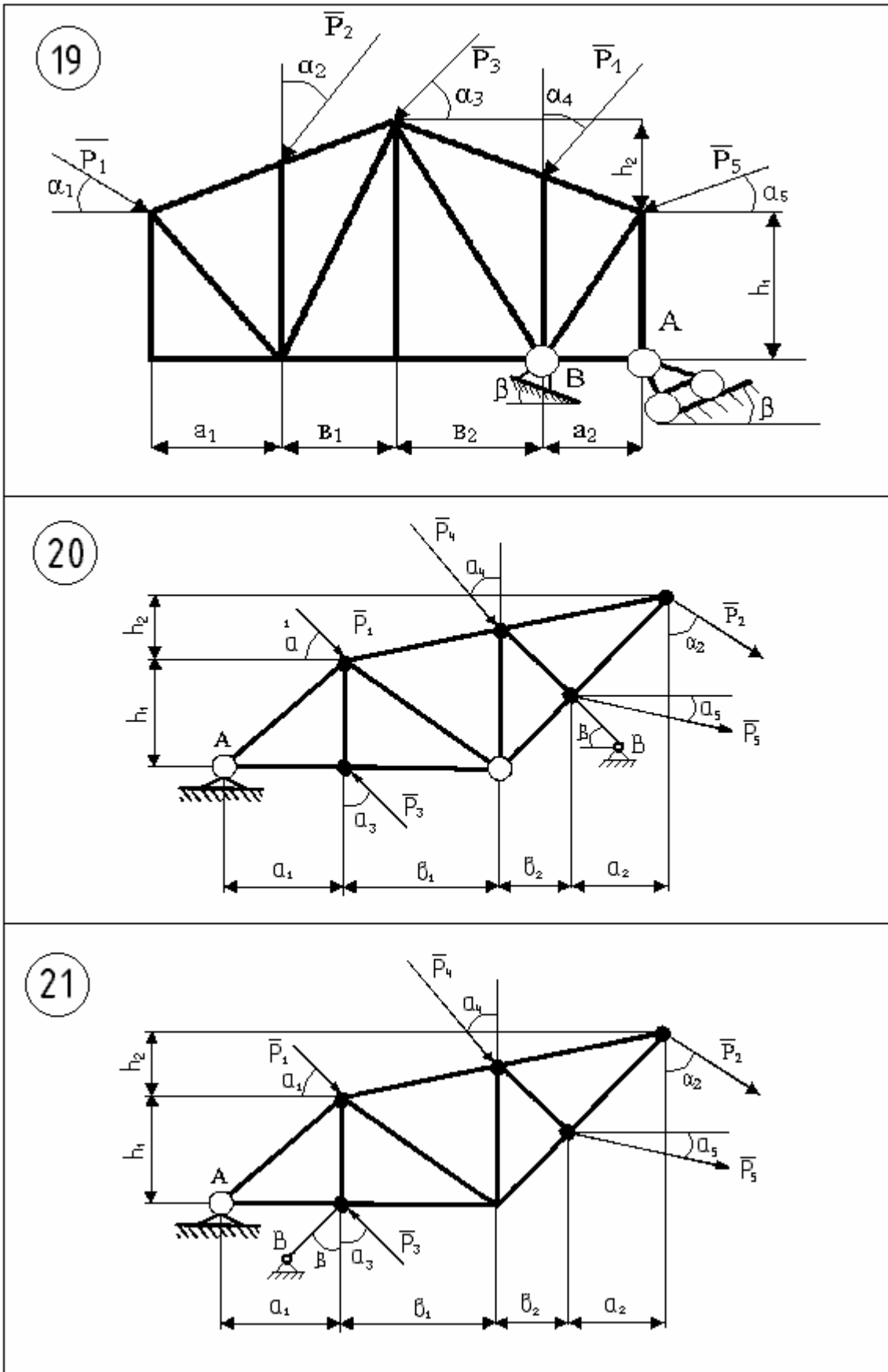


Рисунок 4.7

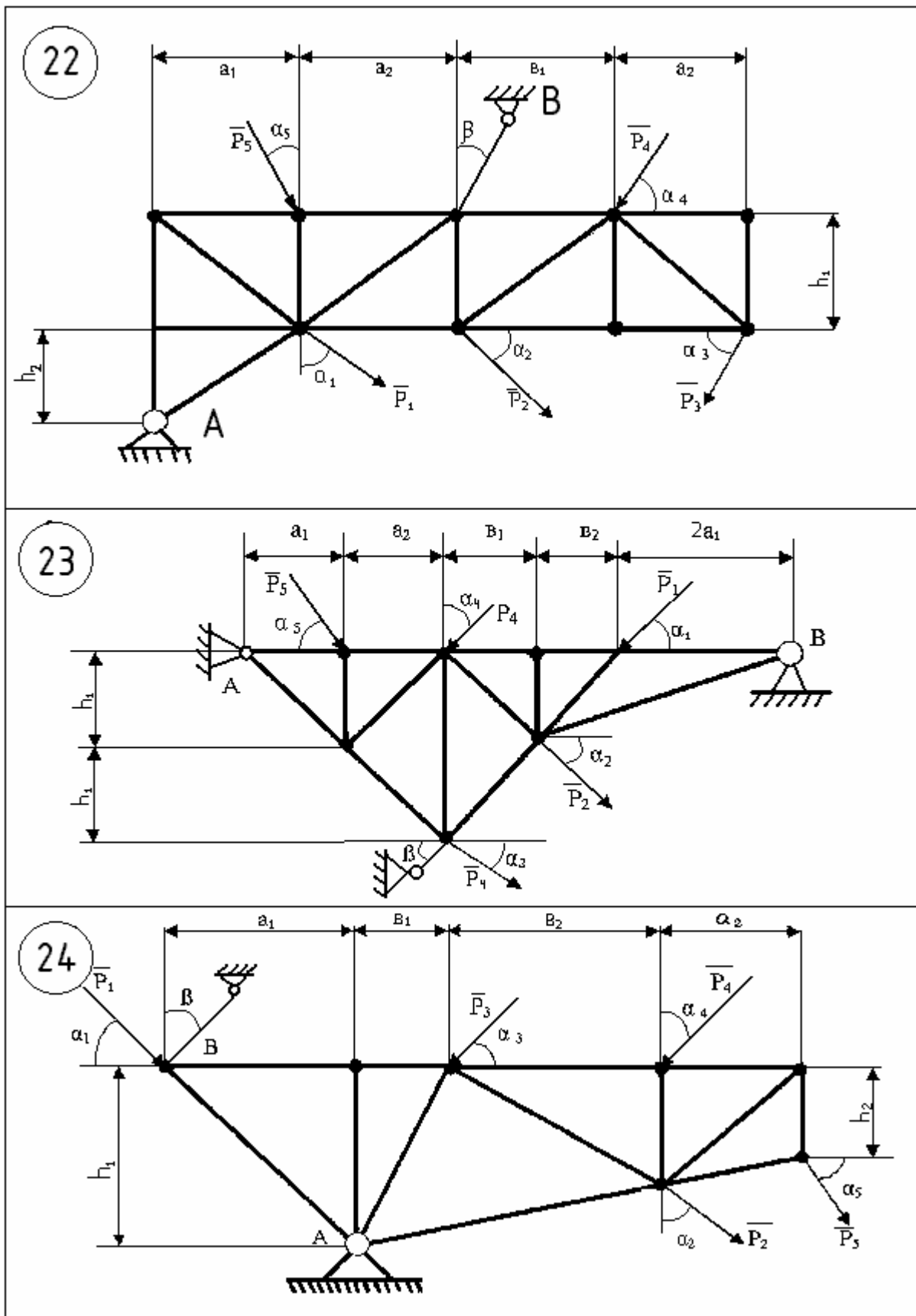


Рисунок 4.8

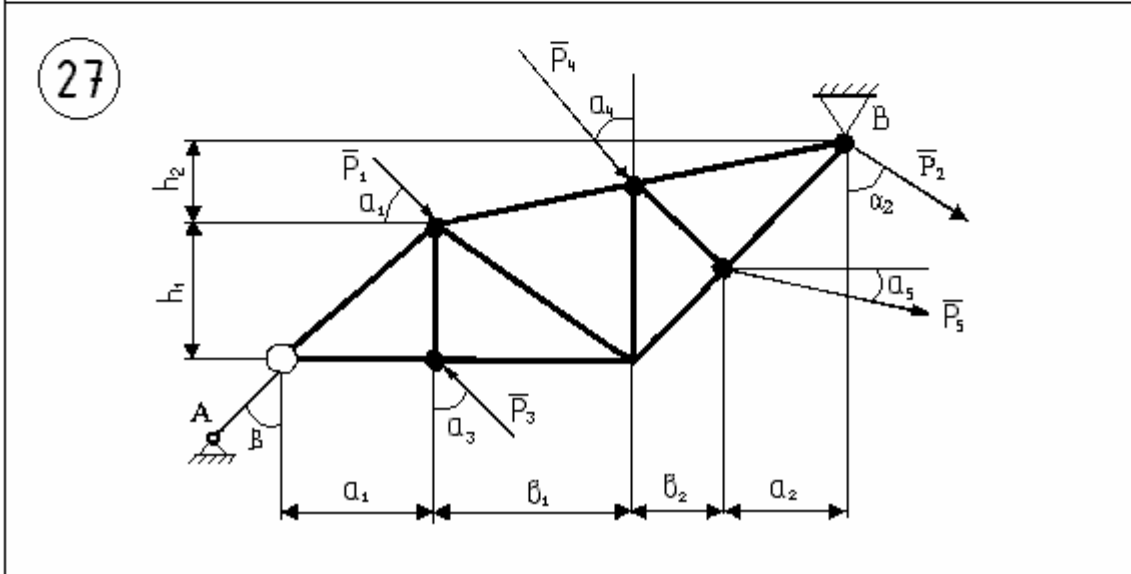
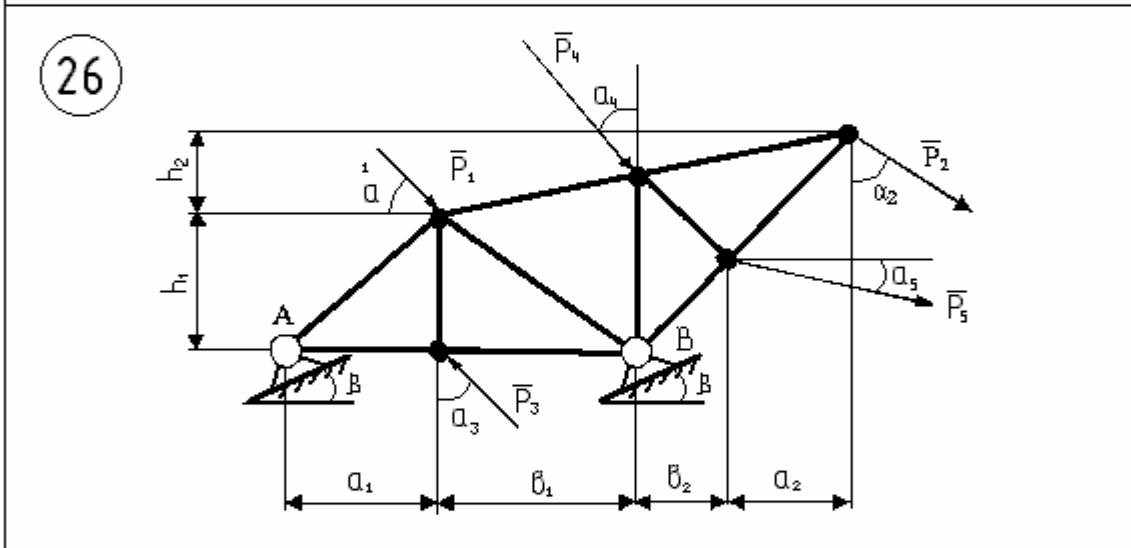
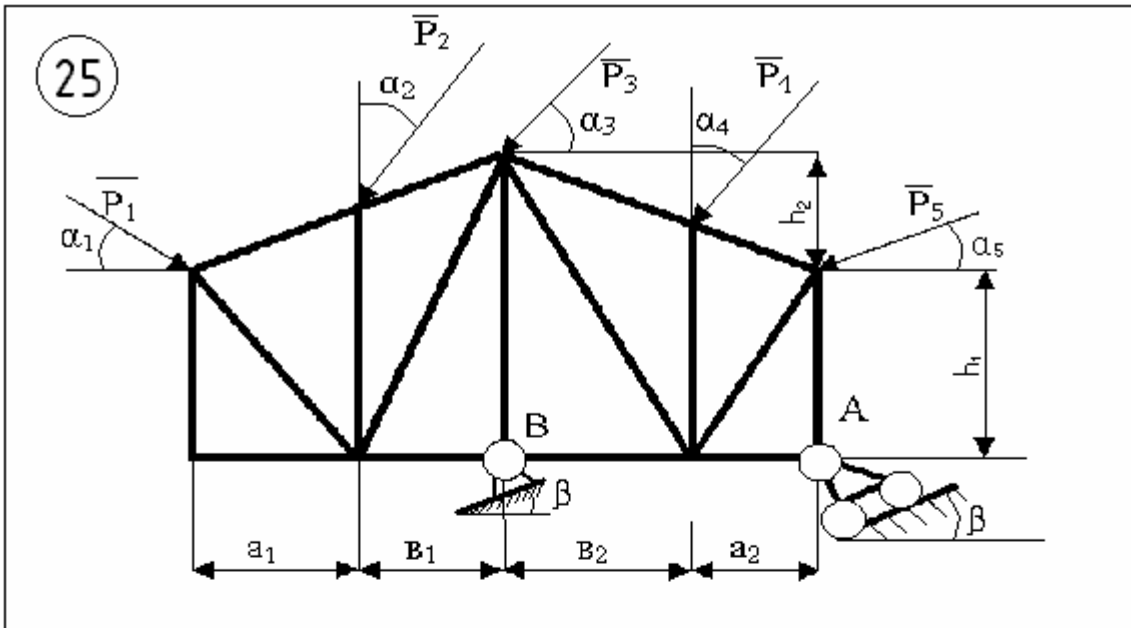


Рисунок 4.9

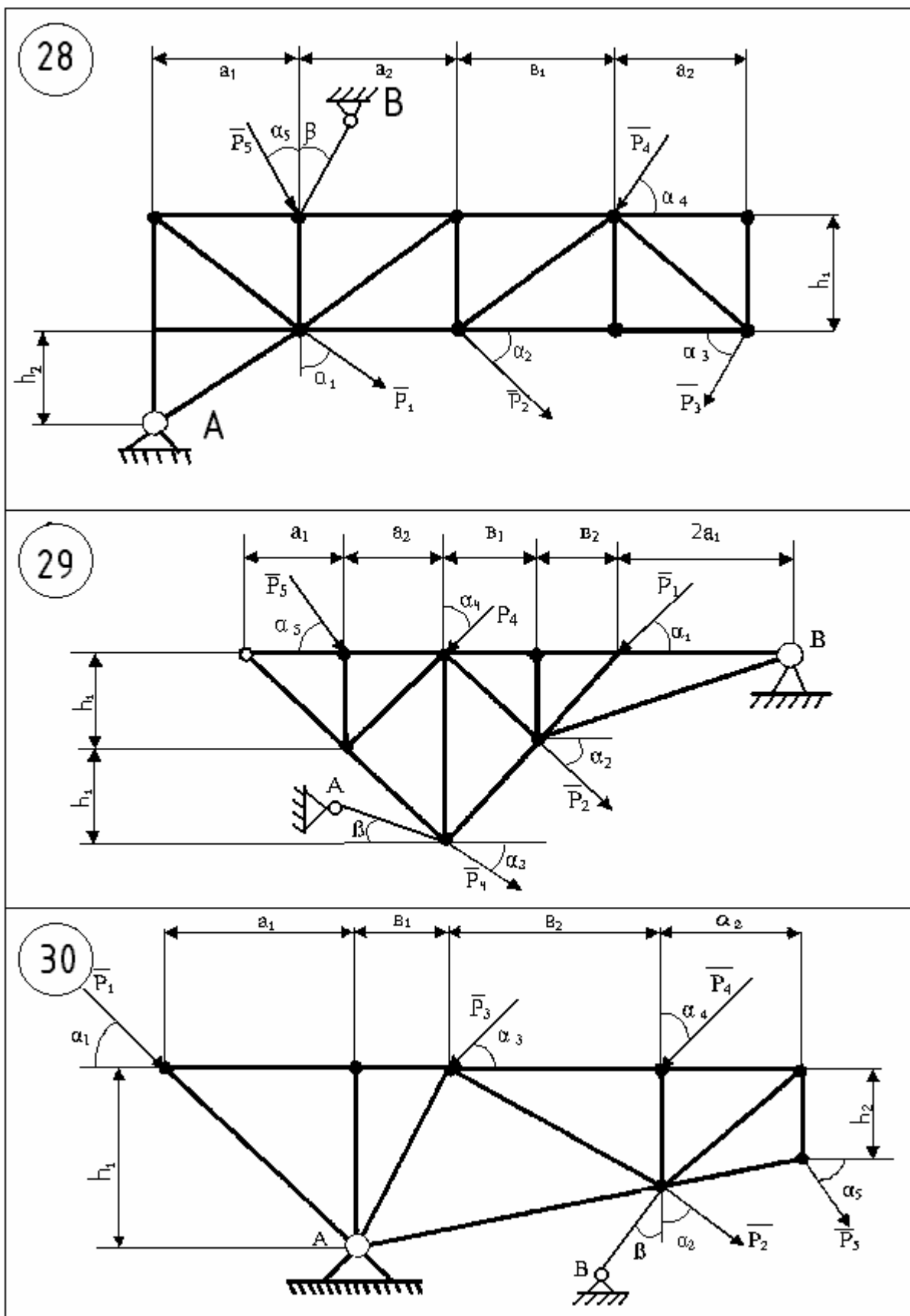


Рисунок 4.10

Розв'язання: Виконуємо рисунок (рис 4.12) ферми згідно з табличними даними і зберігаючи співвідношення між лінійними розмірами. Перевіряємо геометричну незмінність ферми, та нумеруємо стержні. Попередньо приймаємо $\alpha_3 = 30^\circ$. Ферма геометрично незмінна і статично визначена, якщо виконується умова: $k = 2n - 3$, де k, n – відповідно число стержнів і вузлів ферми. Стержень ВЕ будемо вважати опорним стержнем, тоді вузлів $n = 8$, число стержнів $k = 13$: $k = 2 \cdot 8 - 3 = 13$. Отже, ферма статично визначена і геометрично незмінна.

4.1.1 Аналітичне знаходження опорних реакцій ферми

Креслимо ферму (рис. 4.12), розміщену в системі координат $x_A y_A$. Показуємо зовнішні сили і реакції в опорних точках А і Е.

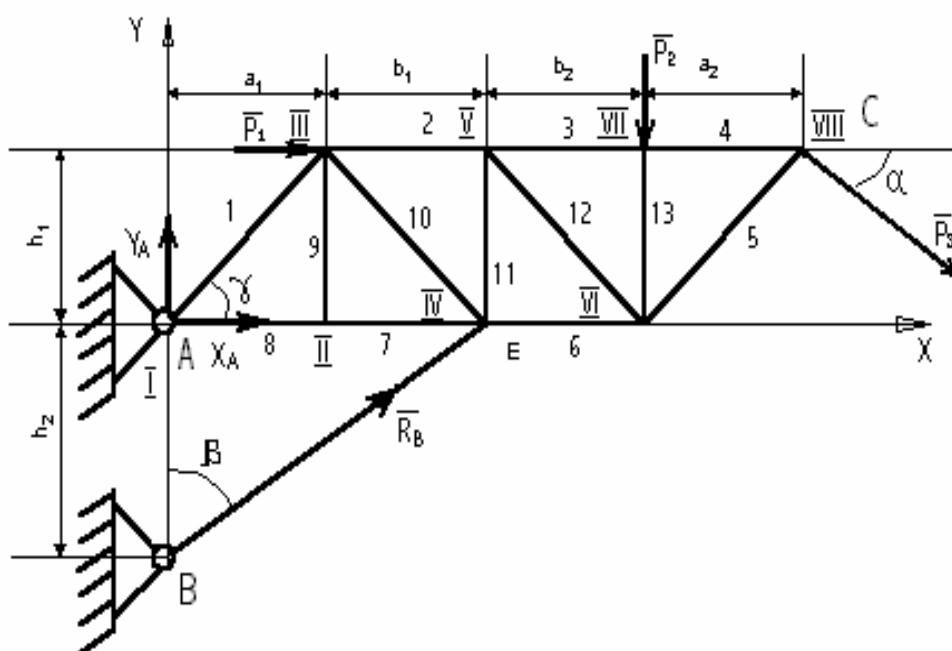


Рисунок 4.12

В точці Е реакція \bar{R}_B напрямлена за стержнем ВЕ, а в нерухомому плоскому шарнірі А реакцію розкладаємо на складові X_A і Y_A . Показуємо на рис. 4.12 кути β та γ , знаходимо їх функції від геометричних розмірів:

$$\sin \beta = (a_1 + b_1) / \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + h_2^2} = 6 / \sqrt{36^2 + 36^2} = 6 / 6\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \beta = h_2 / \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + h_2^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - 1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin \gamma = h_1 / \sqrt{a_1^2 + h_1^2} = 3 / \sqrt{9 + 9} = 1 / \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad (4.1)$$

$$\cos \gamma = a_1 / \sqrt{a_1^2 + h_1^2} = 3 / \sqrt{18} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = h_1 / a_1 = 1.$$

Використовуючи рис. 4.12, складаємо рівняння рівноваги для плоскої довільної системи сил:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &= 0, X_A + R_B \sin\beta + P_1 + P_3 \cos\alpha = 0; \\ \Sigma Y_i &= 0, Y_A + R_B \cos\beta - P_2 - P_3 \sin\alpha = 0; \\ \Sigma M_{A_i} &= 0, -P_1 \cdot h_1 + R_B \cos\beta \cdot (a_1 + b_1) - P_3 \sin\alpha (a_1 + b_1 + b_2 + a_2) - P_3 \cos\alpha \cdot h_1 - \\ &- P_2 \cdot (a_1 + b_1 + b_2) = 0.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (4.2) отримаємо:

$$\begin{aligned}R_B &= [P_1 \cdot h_1 + P_3 \cdot \sin\alpha (a_1 + b_1 + b_2 + a_2) + P_3 \cdot \cos\alpha \cdot h_1 + P_2 (a_1 + b_1 + b_2)] / (a_1 + b_1) \cdot \cos\beta; \\ Y_A &= P_2 + P_3 \cdot \sin\alpha - R_B \cos\beta; \\ X_A &= -R_B \cdot \sin\beta - P_1 - P_3 \cos\alpha.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Підставляючи в розв'язки (4.3) дані умови задачі, отримуємо опорні реакції при $\alpha = 30^\circ$:

$$X_A = -25,79 \text{ кН}, Y_A = -9,6 \text{ кН}, R_B = 24,89 \text{ кН}.$$

Для достовірності розв'язку складаємо перевіряюче рівняння рівноваги.

$$\begin{aligned}\Sigma M_{C_i} &= 0, P_2 \cdot a_2 - Y_A (a_1 + b_1 + b_2 + a_2) + X_A \cdot h_1 - \\ &- R_B \cos\beta \cdot (b_2 + a_2) + R_B \cdot \sin\beta \cdot h_1 = 0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Із врахуванням отриманих даних та умови задачі маємо:

$$5 \cdot 3 + 9,6 \cdot 12 - 25,79 \cdot 3 - 24,89 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6 + 24,89 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = -3,81 \cdot 10^{-6}.$$

Таким чином, опорні реакції знайдено правильно.

4.1.2 Графічне знаходження опорних реакцій ферми за допомогою силового та вірьовочного багатокутників

Креслимо ферму в вибраному масштабі (рис 4.13) без нумерації стержнів. Вибираємо масштаб сил: в 1 см – 2 кН.

Креслимо силовий багатокутник (рис. 4.14). Паралельним переносом відкладаємо вектори сил \bar{P}_1, \bar{P}_2 і \bar{P}_3 . Із кінця сили \bar{P}_3 проводимо лінію дії сили \bar{R}_B напрямленої паралельно опорному стержню BE . Використовуємо вірьовочний багатокутник знаходження точки, де міститься кінець вектора \bar{R}_B . Реакціям \bar{R}_B і \bar{R}_A присвоюємо відповідно номери 4 і 5. Довільно вибрану точку O (рис. 4.14) з'єднуємо відрізками, які називаються променями, з вершинами силового багатокутника. Назви променів відповідають індексам сил, що входять у вершину і виходять з неї. Для зображених на рис 4.14 сил проводимо відповідно промені 1-2, 2-3, 3-4 і 5-1. Із точки A (рис. 4.13) точки прикладення реакції нерухомого шарніра,

проводимо промінь 5-1 до перетину з лінією дії сили \bar{P}_2 (точка A_2), із отриманої точки A_1 проводимо промінь 1-2 до перетину з лінією дії сили \bar{P}_2 , із точки A_2 – промінь 2-3 до перетину з лінією дії сили \bar{P}_3 (точка A_3), із точки A_3 – промінь 3-4 до перетину з лінією дії сили \bar{R}_B (точка A_4). Точку A_4 з'єднуємо з точкою A . Відрізок A_4A є замикальний промінь 4-5. Замкнута ламана лінія $AA_1A_2A_3A_4A$ на рис.4.13 сторони якої є променями 5-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, називається вірвовочним багатокутником.

Паралельним переносом будуємо промінь 4-5 із точки O (рис 4.14). Точка, де промінь 4-5 перетинається з лінією дії сили \bar{R}_B - кінець вектора \bar{R}_B і початок вектора R_A . З отриманої точки проводимо промінь в початок сили P_1 . Замкнутий багатокутник, побудований на векторах $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{R}_B$ і \bar{R}_A який зображено на рис 4.14, називається силовим. Вимірюємо довжину векторів \bar{R}_A , та \bar{R}_B , через масштаб сил переводимо в одиниці сили і отримуємо $\bar{R}_A = 27,31 \text{ кН}$, $\bar{R}_B = 24,6 \text{ кН}$.

Зрівнюємо одержані результати з даними аналітичного розрахунку. Величина \bar{R}_B знайдена з похибкою

$$\Delta(R_B) = \frac{24,89 - 24,6}{\frac{24,89 + 24,6}{2}} \cdot 100\% \approx 1,1\% .$$

4.1.3 Розрахунок зусиль в стержнях методом вирізання вузлів

Розглядаємо ферму, на яку діють зовнішні навантаження $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{X}_A, \bar{Y}_A$ та \bar{R}_B як показан на рис 4.12. Розрахунок зусиль в стержнях починаємо із того вузла, де сходяться тільки два стержні. Вузли нумеруємо так, як зображено на рис 4.12. Сили і реакції стержнів, що прикладені до вузла, утворюють збіжну плоску систему сил. Така система сил перебуває в рівновазі, якщо виконуються умови

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0.$$

При складанні рівнянь рівноваги вузлів кожен із них зображаємо окремо разом із зусиллями, що замінюють стержні. Розрахунок починаємо із вузла I, для якого складаємо рівняння рівноваги.

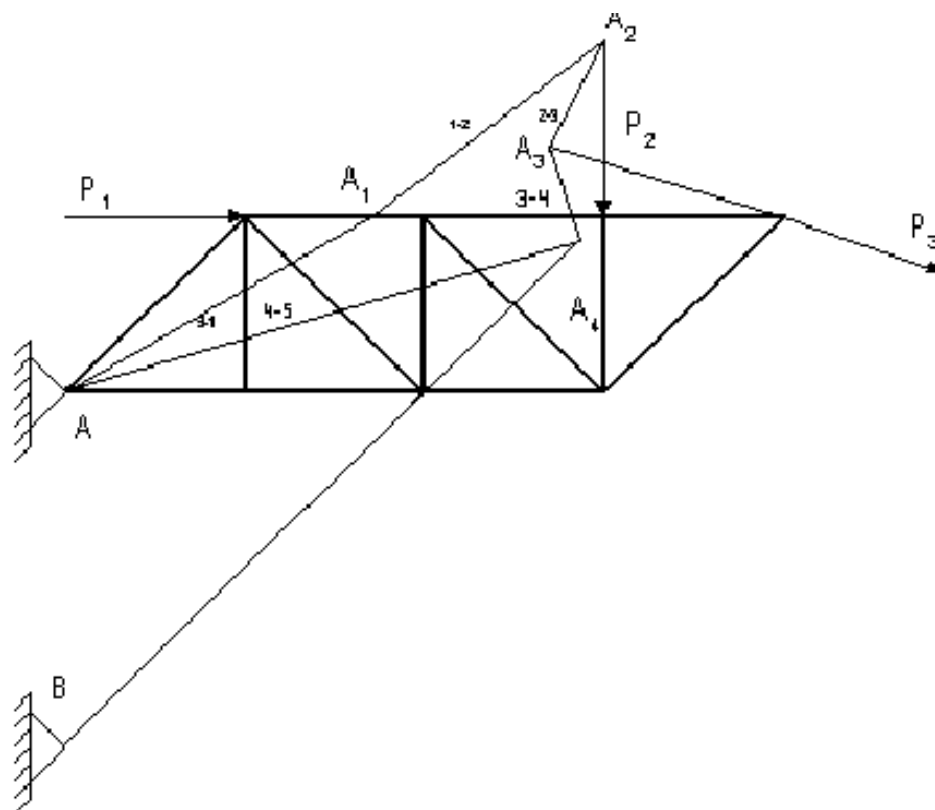


Рисунок 4.13

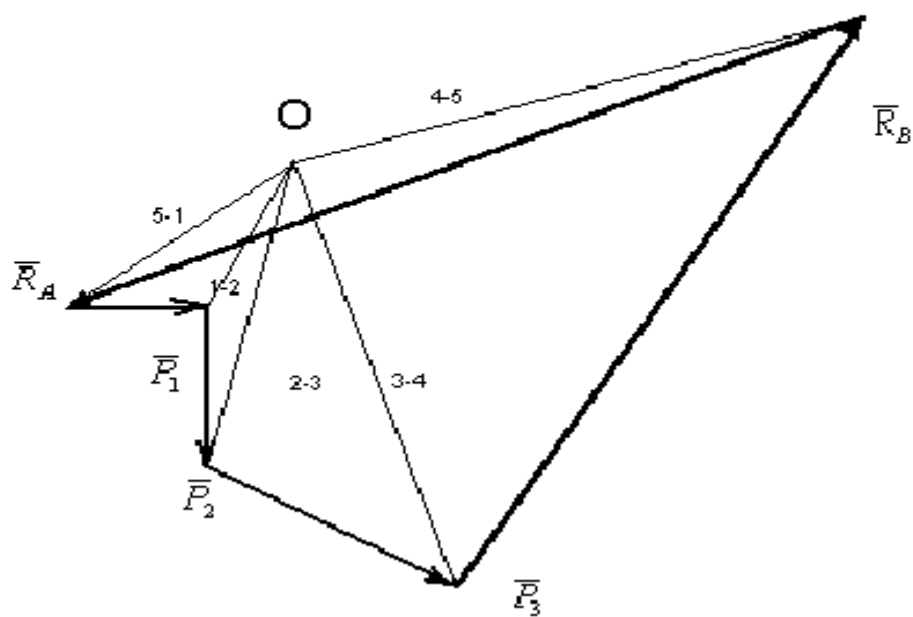
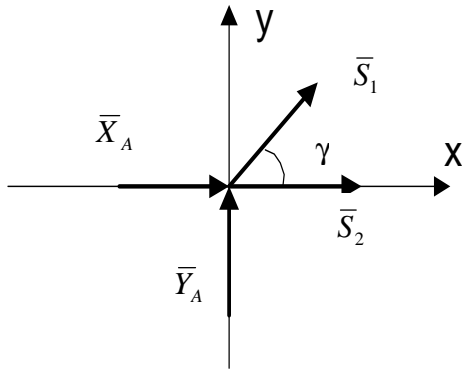


Рисунок 4.14



Вузол I

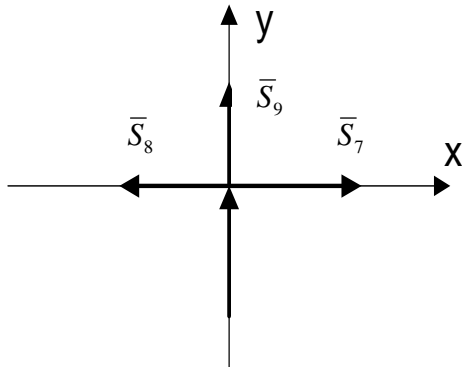
$$\sum X_i = X_A + S_8 + S_1 \cos \gamma = 0;$$

$$\sum Y_i = Y_A + S_1 \sin \gamma = 0.$$

Звідки одержуємо

$$S_1 = -Y_A / \sin \gamma; \quad (4.5)$$

$$S_8 = -X_A - S_1 \cos \gamma. \quad (4.6)$$



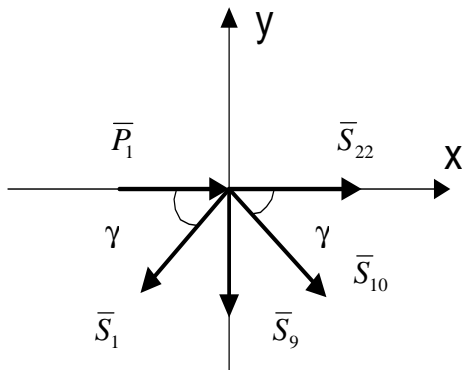
Вузол II

$$\sum X_i = -S_8 + S_7 = 0;$$

$$\sum Y_i = S_9 = 0;$$

$$S_7 = S_8 \quad (4.7)$$

$$S_9 = 0. \quad (4.8)$$



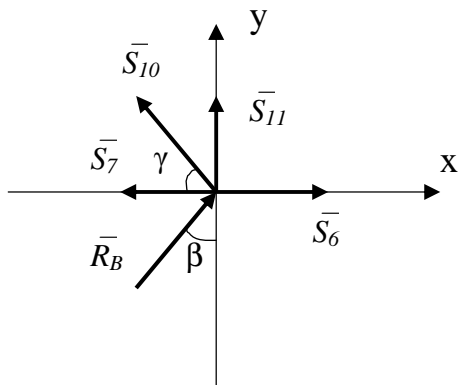
Вузол III

$$\sum X_i = -S_1 \cos \gamma + S_{10} \cos \gamma + P_1 + S_2 = 0;$$

$$\sum Y_i = -S_1 \sin \gamma - S_9 + S_{10} \sin \gamma = 0,$$

$$S_{10} = -S_1 - S_9 / \sin \gamma = 0; \quad (4.9)$$

$$S_2 = (S_1 - S_{10}) / \cos \gamma - P_1 = 0. \quad (4.10)$$



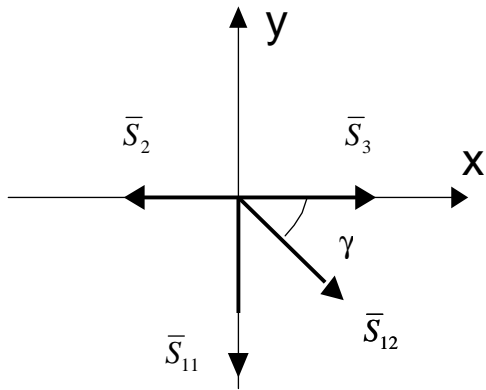
Вузол IV

$$\sum X_i = -S_7 - S_{10} \cos \gamma + R_B \sin \beta + S_6 = 0;$$

$$\sum Y_i = R_B \sin \beta + S_{10} \sin \gamma + S_{11} = 0.$$

$$S_{11} = -R_B \cos \beta - S_{10} \sin \gamma; \quad (4.11)$$

$$S_6 = S_7 + S_{10} \cos \gamma - R_B \sin \beta = 0. \quad (4.12)$$



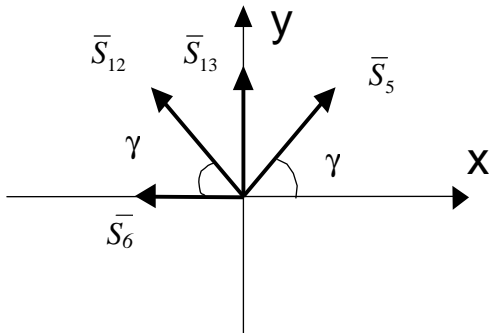
Вузол V

$$\sum X_i = -S_2 + S_3 + S_{12} \cos \gamma = 0;$$

$$\sum Y_i = -S_{11} - S_{12} \sin \gamma = 0.$$

$$S_{12} = -S_{11} / \sin \gamma; \quad (4.13)$$

$$S_3 = S_2 - S_{12} \cos \gamma. \quad (4.14)$$



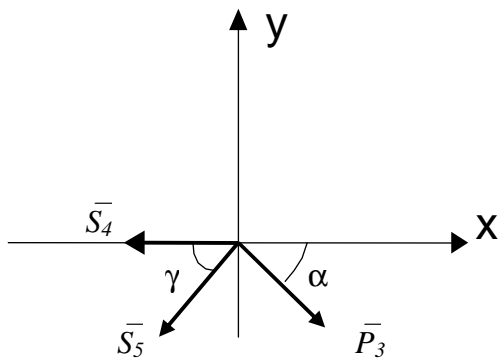
Вузол VI

$$\sum X_i = -S_6 - S_{12} \cos \gamma + S_5 \cos \gamma = 0;$$

$$\sum Y_i = S_{12} \sin \gamma + S_{13} + S_5 \sin \gamma = 0.$$

$$S_5 = S_{12} + S_6 / \cos \gamma; \quad (4.15)$$

$$S_{13} = -(S_5 + S_{12}) \sin \gamma. \quad (4.16)$$



Вузол VIII

$$\sum X_i = -S_4 - S_5 \cos \gamma + P_3 \cos \alpha = 0;$$

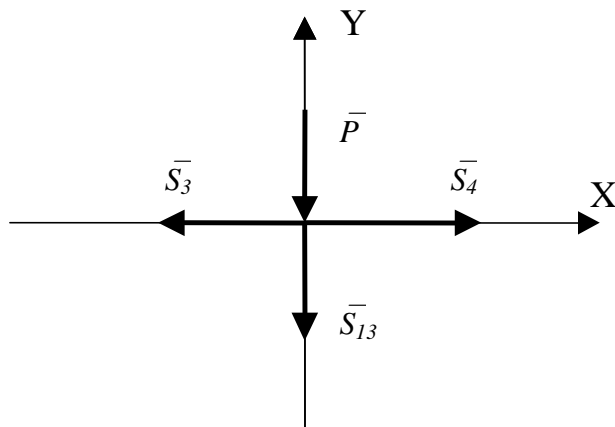
$$\sum Y_i = -S_5 \sin \gamma - P_3 \sin \alpha = 0,$$

$$S_4 = P_3 \cos \alpha - P_5 \cos \gamma. \quad (4.17)$$

Формулами (4.5-4.17) отримано зусилля для всіх стержнів ферми. Підставляючи в ці формули величини X_A , Y_A та R_B , знаходимо значення зусиль $S_1 \dots S_{13}$ (кН) при $\alpha = 30^\circ$;

$S_1 = 31,57;$	$S_2 = 16,2;$	$S_3 = 8,2;$	$S_4 = 8,2;$	$S_5 = -4,24;$
$S_6 = -11;$	$S_7 = 16,2;$	$S_8 = 16,2;$	$S_9 = 0;$	$S_{10} = -13,57;$
$S_{11} = -8;$	$S_{12} = 11,31;$	$S_{13} = 5.$		

На останньому вузлі VII виконуємо перевірку. Складаємо для нього рівняння рівноваги:



Вузол VII

$$\sum X_i = -S_3 - S_4 = 0;$$

$$\sum Y_i = -P_2 - S_{13} = 0.$$

Підставляючи в ці рівняння знайдені зусилля, переконуємося в тому, що S_3 і S_{13} отримані вірно.

4.1.4 Розрахунок зусиль в стержнях ферми методом наскрізних розрізів (Ріттера)

Розглянемо ферму, зображену на рис. 4.12. Проведемо розріз через стержні 2, 10 та 7. Покажемо ліву частину ферми від такого розрізу на рис.4.15.

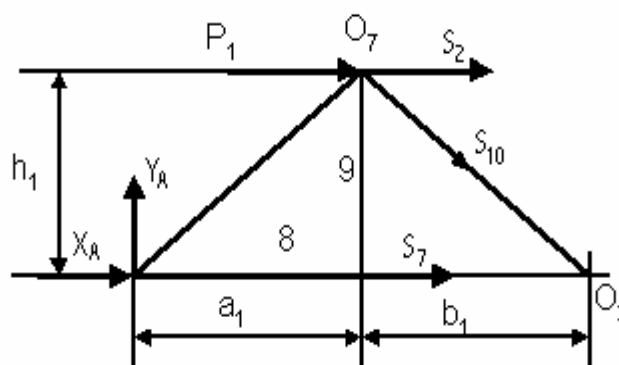


Рисунок 4.15

Реакції розрізаних стержнів 2, 10, 7 направляємо за стержнями. Сили P_1 , X_A , Y_A – відомі, а S_2 , S_{10} та S_1 вважаємо невідомими. Для того, щоб їх знайти, потрібно скласти три рівняння рівноваги для плоскої довільної системи сил. Задача спрощується, якщо необхідно знайти тільки одне зусилля S_2 . Для цього складаємо рівняння моментів відносно точки O_2 . Така точка називається точкою Ріттера, вона виключає з рівнянь рівноваги невідомі зусилля S_{10} та S_7 .

$$\Sigma M_{O_2}(\bar{F}_i) = -Y_A \cdot (a_1 + b_1) - P_1 \cdot h_1 - S_2 \cdot h_1 = 0,$$

звідки

$$S_2 = -(-Y_A(a_1+b_1) - P_1 \cdot h_1)/h_1 = + (9,6 \cdot 6 + 9)/3 = 16,2 \text{ кН}.$$

Для знаходження зусилля S_7 точкою Ріттера буде точка O_7 – точка, де перетинаються зусилля S_2 , S_{10} та сила P_1 . Щоб знайти зусилля S_{10} , необхідно скласти таке рівняння, в якому не містилися б зусилля S_2 та S_7 . Оскільки S_2 та S_7 паралельні, то раціонально скласти рівняння проєкцій на вісь OY . Виходячи із таких міркувань, складаємо рівняння рівноваги:

$$\Sigma M_{O_7}(\bar{F}_i) = -Y_A \cdot a_1 + X_A \cdot h_1 + S_7 \cdot h_1 = 0;$$

$$\Sigma Y_i = Y_A - S_{10} \cdot \sin \gamma = 0;$$

звідки маємо:

$$S_7 = (Y_A \cdot a_1 - X_A \cdot h_1)/h_1 = (-9,6 \cdot 3 + 25,79 \cdot 3)/3 = 16,2 \text{ кН};$$

$$S_{10} = Y_A/\sin \gamma = -9,6/(\sqrt{2}/2) = -13,58 \text{ кН}.$$

Зусилля в стержнях 6 та 12 можна знайти за допомогою перерізу, проведеного через стержні 3, 12 та 6 (рис. 4.12). розглянемо праву від перерізу частину ферми і покажемо її на рис. 4.16.

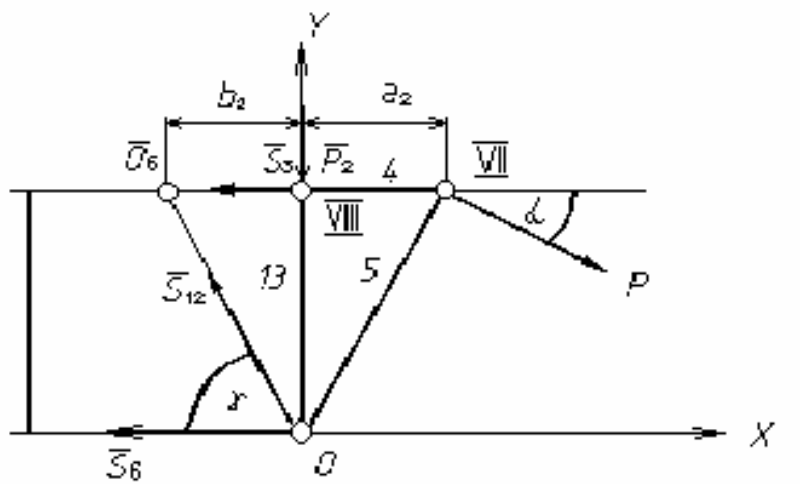


Рисунок 4.16

Для знаходження зусиль S_3 , S_6 і S_{12} отримуємо такі рівняння рівноваги сил:

$$\Sigma M_{O_6}(\bar{F}_i) = -P_2 \cdot b_2 - P_3 \cdot \sin \alpha \cdot (b_2 + a_2) - S_6 \cdot h_1 = 0;$$

$$\Sigma M_{O_3}(\bar{F}_i) = S_3 \cdot h_1 - P_3 \cdot \cos \alpha \cdot h_1 - P_3 \cdot \sin \alpha \cdot a_2 = 0;$$

$$\Sigma Y_i = S_{12} \cdot \sin \gamma - P_2 - P_3 \sin \alpha = 0;$$

звідки маємо:

$$S_6 = -(P_2 \cdot b_2 + P_3 \sin \alpha (b_2 + a_2))/h_1 = -(5 \cdot 3 + 6 \cdot 0,5 \cdot 6)/3 = -11 \text{ кН};$$

$$S_3 = (P_3 \cdot h_1 \cdot \cos \alpha + P_3 \cdot \sin \alpha \cdot a_2)/h_1 = (6 \cdot 3 \cdot 0,866 + 6 \cdot 0,5 \cdot 3)/3 = 8,1 \text{ кН};$$

$$S_{12} = (P_2 + P_3 \cdot \sin \alpha)/\sin \gamma = (5 + 6 \cdot 0,5)/0,707 = 11,31 \text{ кН}.$$

4.1.5 Знаходження зусиль в стержнях ферми графічним методом (побудова діаграми Максвелла – Кремони)

Перед побудовою діаграми Максвелла - Кремони необхідно провести таку підготовку:

а) виконуємо рисунок ферми відповідно до її геометричних розмірів (рис.4.17)

б) показуємо вектори заданих сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ і знайдених реакцій \bar{R}_B і \bar{R}_A ;

в) позначаємо області між зовнішніми силами: Q, B, V, D, F;

г) позначаємо внутрішні області: K, L, M, N, O, T;

д) позначаємо вузли римськими цифрами: I-VIII;

е) вибираємо обхід зовнішніх сил і вузлів (на рис. 4.17 показано його напрям за годинниковою стрілкою);

ж) вказуємо масштаб сил (в даному випадку в 1 см - 2 кН).

Будуємо діаграму Максвелла - Кремони (рис. 4.18). Креслимо багатокутник зовнішніх сил відповідно до вибраного обходу. Цей багатокутник позначаємо відповідними великими буквами. Між зовнішніми силами ферми знаходяться області Q, B, V, D, F і Q. Одержуємо багатокутник зовнішніх сил qbvfdq на діаграмі.

Побудову зусиль в стержнях ферми починаємо із вузла, де сходяться два стержні. Такими вузлами на рис. 4.17 можуть бути вузли I, VIII. Розглядаємо вузол I.

При обході вузла I у вибраному напрямку зустрічаються області Q, K, F і Q. На діаграмі побудований відрізок qf. Через точку q (рис. 4.18) проводимо пряму, паралельну стержню I, а через точку f - пряму, паралельну стержню 8. На перетині цих двох прямих одержуємо точку r. Многокутник qkfq - многокутник сил, прикладених до вузла I. Стержню I відповідає зусилля qk, а стержню 8 - зусилля kf.

При обході вузла II зустрічаються області F, K, L і F. На діаграмі знаходимо відрізок fk, через точку k проводимо пряму, паралельну

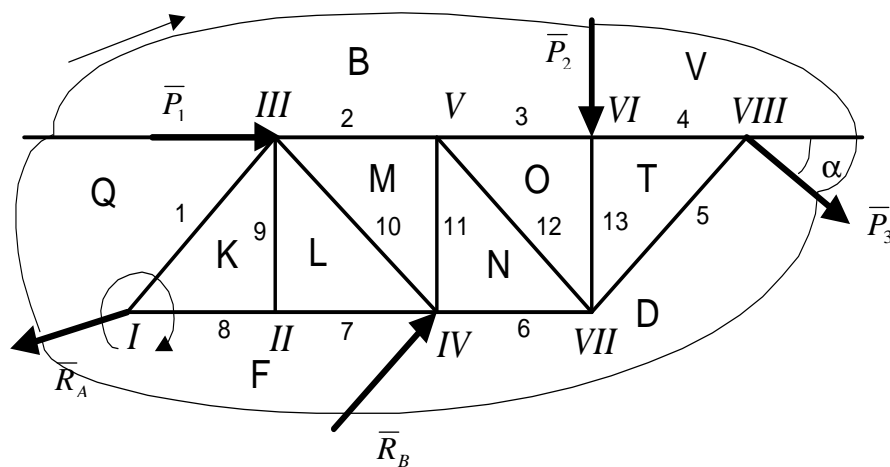


Рисунок 4.17

стержню 9, а через точку f -пряму, паралельну стержню 7. Їх точка перетину l відповідає області L та збігається з точкою k. Многокутник сил

для вузла II - фігура fkf , що показана на діаграмі відрізком kf . Оскільки точки k і l збігаються, то зусилля $kl=0$, тоді стержень 9 - нульовий.

Переходимо до вузла III. Сили, що діють на цей вузол, розмежовують області L,K,Q,B,M і L. Після побудови зусиль вузлів I та II зусилля lk , kq та qb відомі. Тоді через точку b проводимо пряму, паралельну стержню 2, а через точку l – пряму, паралельну стержню 10. Їх перетин дає точку m , що відповідає області M. Многокутник сил для вузла III – $lkqbm$.

Аналогічними побудовами знаходимо многокутники сил для вузлів, що залишились в такій послідовності: IV, VII, VI. Це многокутники: для вузла IV – $dflmnd$, для вузла VIII – $dtvd$, для вузла VI – $bvtob$. Залишились два останні вузли V та VII.

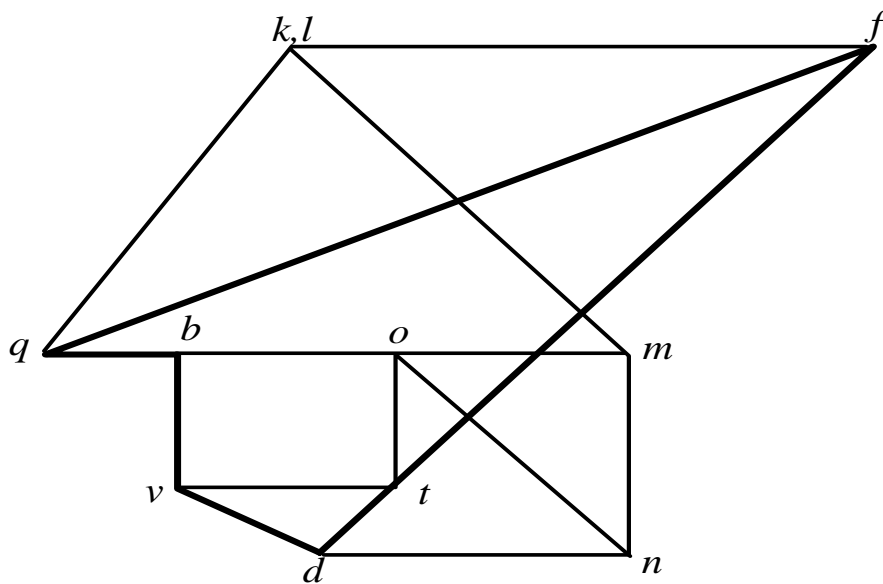


Рисунок 4.18

Для одержання многокутників сил у вузлах V та VII достатньо з'єднати точки o і n (рис.4.18). Якщо відрізок on буде паралельним стержню 12, то діаграма побудована правильно. Одержуємо силові многокутники: $nmbon$ – для вузла V і $notdn$ – для вузла VIII. Побудова діаграми закінчена.

Отримана діаграма Максвелла - Кремони (рис.4.18) дає змогу відшукати значення зусилля в будь-якому стержні ферми, а також його знак. Модуль вимірюється довжиною відрізка і переводом її через масштаб в одиниці сили, а знак – напрямком відрізків на діаграмі.

Приклад. Розглянемо стержень під номером 11 (див. рис. 4.17). Зусилля цього стержня при обході вузла IV називається tn . Знаходимо на діаграмі (див. рис. 18) напрямлений відрізок tn , уявно переносимо напрям tn з рис. 4.18 на рис.4.17 до вузла IV. Вектор tn напрямлений до вузла IV. Якщо зусилля спрямоване до вузла, то стержень під його дією стискується. Тоді стержень 11 стиснутий і знак зусилля S_{11} від'ємний.

Якщо зусилля для будь-якого іншого стержня спрямоване від вузла, то такий стержень розтягнений і його зусилля додатне. Із діаграми на рис. 4.18 маємо, кН:

$$\begin{aligned} S_1 &= qk = 13,4; & S_2 &= bm = 16,1; & S_3 &= ob = 8; \\ S_4 &= vt = 8; & S_5 &= dt = -4; & S_6 &= dn = 10,8; \\ S_7 &= fl = 16; & S_8 &= kf = 16; & S_9 &= kl = 0; \\ S_{10} &= ml = -13,6; & S_{11} &= nm = -7,8; & S_{12} &= on = 11,2. \end{aligned}$$

Остаточна перевірка виконується при порівнянні зусиль в стержнях, знайдених двома методами: вирізання вузлів і діаграми Максвелла – Кремони. Абсолютна похибка становить в кН: $\Delta_1 = \Delta_{10} = 0,03$, $\Delta_2 = 0,1$; $\Delta_4 = \Delta_6 = \Delta_7 = \Delta_8 = \Delta_3 = \Delta_{11} = 0,2$; $\Delta_5 = 0,24$; $\Delta_{12} = 0,11$; $\Delta_9 = \Delta_{13} = 0$.

По найбільшій абсолютній похибці знаходимо відносну похибку обчислень:

$$\Delta(S_5) = \frac{4,24 - 4}{(4,42 + 4)/2} \cdot 100\% = 5,8\%.$$

4.1.6 Знаходження опорних реакцій та зусиль в стержнях ферми при змінному значенні кута α

При зміні напрямку лінії дії сили \bar{P}_3 значення опорних реакцій та зусиль в стержнях ферми змінюється. Їх конкретні значення визначимо за допомогою ЕОМ, склавши при цьому програму, наприклад, на мові BASIC. Алгоритм для програми є формули (4.3), (4.5) – (4.17). Значення кута α змінюємо в межах від 0 до 360° з кроком 30° .

Наведемо текст програми, де порядковими номерами 10 – 710 позначені оператори та пояснення до кожного оператора.

10 -30 – коментарі, які друкуються ЕОМ, але не обробляються;

40-120 – задаються значення постійних сил та розмірів;

130-160 – записані формули (4.1), за допомогою яких знаходяться функції кутів β і γ ;

180 – початок циклу, де вказується, що кут α (позначено U) змінюється від 0 до 360° з кроком 30° ;

190-200 – відповідно записані значення $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ в радіанній мірі;

210-590 – записані формули, якими визначаються опорні реакції та зусилля в стержнях;

280 – перевірочний момент ($\Sigma M_C(F)$).

600-650 – оператори виведення результатів до друку;

700 – закінчення циклу, відкритого оператором 180;

710 – кінець програми.

Після віддрукованої програми знаходиться фрагмент результатів розрахунків.

10 REM РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ

20 REM ЗРАЗКОВИЙ ПРИКАД ПРОГРАМИ

```

30 REM ВИКОНАВ СТ. ГР. 1Б-00 ІВАНОВ І. І.
40 P1=3
50 P2=5
60 P3=6
70 A1=3
80 A2=3
90 B1=3
100 B2=3
110 H1=3
120 H2=6
130 S=(A1+B1)/SQR((A1+B1)^2+H2^2)
140 C=SQR(1-S^2)
150 SN=H1/SQR(A1^2+H1^2)
160 CC=SQR(1-SN^2)
170 LPRINT TAB(20) "_____РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ_____"
180 FOR U=30 TO 360 STEP 30
190 U1=SIN(U*PI/180)
200 U2=COS(U*PI/180)
210 R1=P1*H1+P3*U1*(A1+B1+B2+A2)
220 R2=P3*U2*H1+P2*(A1+B1+B2)
230 RB=(R1+R2)/((A1+B1)*C)
240 YA=P2+P3*U1-RB*C
250 XA=-RB*S-P1-P3*U2
260 M1=P2*A2-YA*(A1+B1+B2+A2)+XA*H1
270 M2=-RB*C*(B2+A2)+RB*S*H1
280 MC=M1+M2
290 S1=-YA/SN
300 S8=-XA-S1*CC
400 S7=S8
500 S9=0
510 SD=-S1-S9/SN
520 S2=(S1-SD)*CC-P1
530 S0=-RB*C-SD*SN
540 S6=S7+SD*CC-RB*S
550 SW=-S0/SN
560 S3=S2-SW*CC
570 S5=SW+S6/CC
580 TS=-(S5+SW)*SN
590 S4=P3*U2-S5*CC
600 PRINT TAB(6) "_____U="U"_____ "
610 PRINT TAB(6) "XA="; XA; TAB (17) "YA=";
YA;TAB(28)"RB=";RB;TAB(40)"MC=";MC
620 PRINT TAB(6)"S1=";S1;TAB(17);"S2=";
S2;TAB(28)"S3=";S3;TAB(40)"S4=";S4

```

```
630 PRINT TAB(6)"S5=";S5;TAB(17);
"S5=";S5;TAB(28)"S7=";S7;TAB(40)"S8=";S8
640 PRINT TAB(6)"S9=";S9;TAB(17);"SD=";
SD;TAB(28)"SO=";SO;TAB(40)"SW=";SW
645 PRINT TAB(6)"TS=";TS
650 PRINT
700 NEXT U
710 END
```

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

U=30

XA=-25.79422 YA=-9.598076 RB= 24.88743 MC=-3.814697E-06
S1=13.57373 S2= 16.19616 S3= 8.196156 S4= 8.196156
S5=-4.242644 S6=-11 S7= 16.19615 S8= 16.19615
S9= 0 SD=-13.57373 SO=-8 SW= 11.31371
TS=-4.999998

U=120

XA=-17.89 YA=-7.70 RB= 25,30
S1=10.88 S2= 12.39 S3= 2.20 S4= 2.20
S5=-7.35 S6=-15.39 S7= 10.20 S8= 10.20

U=360

XA=-21 YA=-7.000001 RB= 16.97056 MC= 3.814697E-06
S1= 9.899497 S2= 11 S3= 6.000003 S4= 6.000002
S9= 0 SD=-9.899497 SO=-5 SW= 7.071069
TB=-4.999999

С.5 Розрахунок та дослідження збірної конструкції

Плоска рама (рис. 5.1-5.10) складається з двох частин, які з'єднані шарніром С. На раму діють сили P_1 і P_2 і пара сил з моментом M . До окремих частин рами прикладене розподілене навантаження інтенсивністю q . Геометричні розміри рами визначаються параметрами a , b , c , h , а кути φ_1 і φ_2 вказують напрямок дії сил P_1 і P_2 .

За даними розмірами і силовими навантаженнями знайти:

- опорні реакції рами і вказати їх залежність від змінного кута;
- побудувати графіки залежностей опорних реакцій від змінного кута;
- визначити з точністю до 1 градуса значення змінного кута, при якому вертикальні складові опорних реакцій рівні між собою;
- визначити максимальне і мінімальне значення реакції опор А і В в залежності від змінного кута.

Значення силових навантажень розмірів і кутів взяти з таблиці 5.1. де кут, помічений “ * ” змінюється від 0^0 до 360^0 .

Таблиця 5.1.

Варі- ант	P_1	P_2	M	q	A	b	c	h	φ_1	φ_2
	кН		кН·м	кН / м	м				Град.	
1	6	4	10	1,4	4	4	3	2	30	*
2	3	2	12	1,7	5	3	3	1	*	45
3	5	6	8	1,2	4	3	4	5	60	*
4	4	7	14	1,5	3	6	2	3	*	75
5	3	6	10	1,3	6	2	3	4	15	*
6	6	5	16	1,4	2	2	4	3	*	30
7	8	2	14	1,8	4	4	2	3	45	*
8	4	3	12	1,2	3	5	2	1	*	60
9	7	6	8	1,4	5	3	4	2	75	*
0	5	3	11	1,6	4	6	4	3	*	15

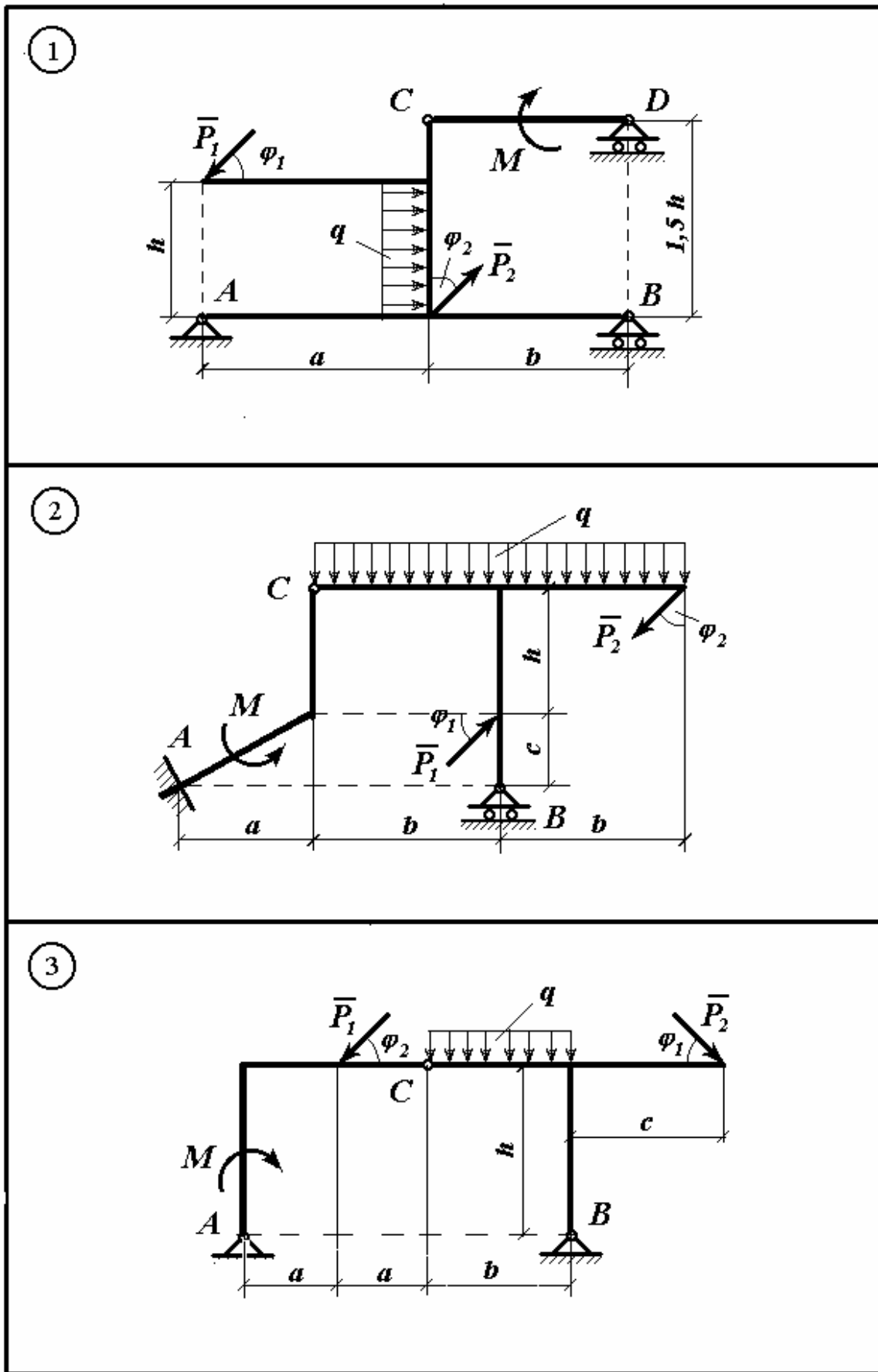


Рисунок 5.1

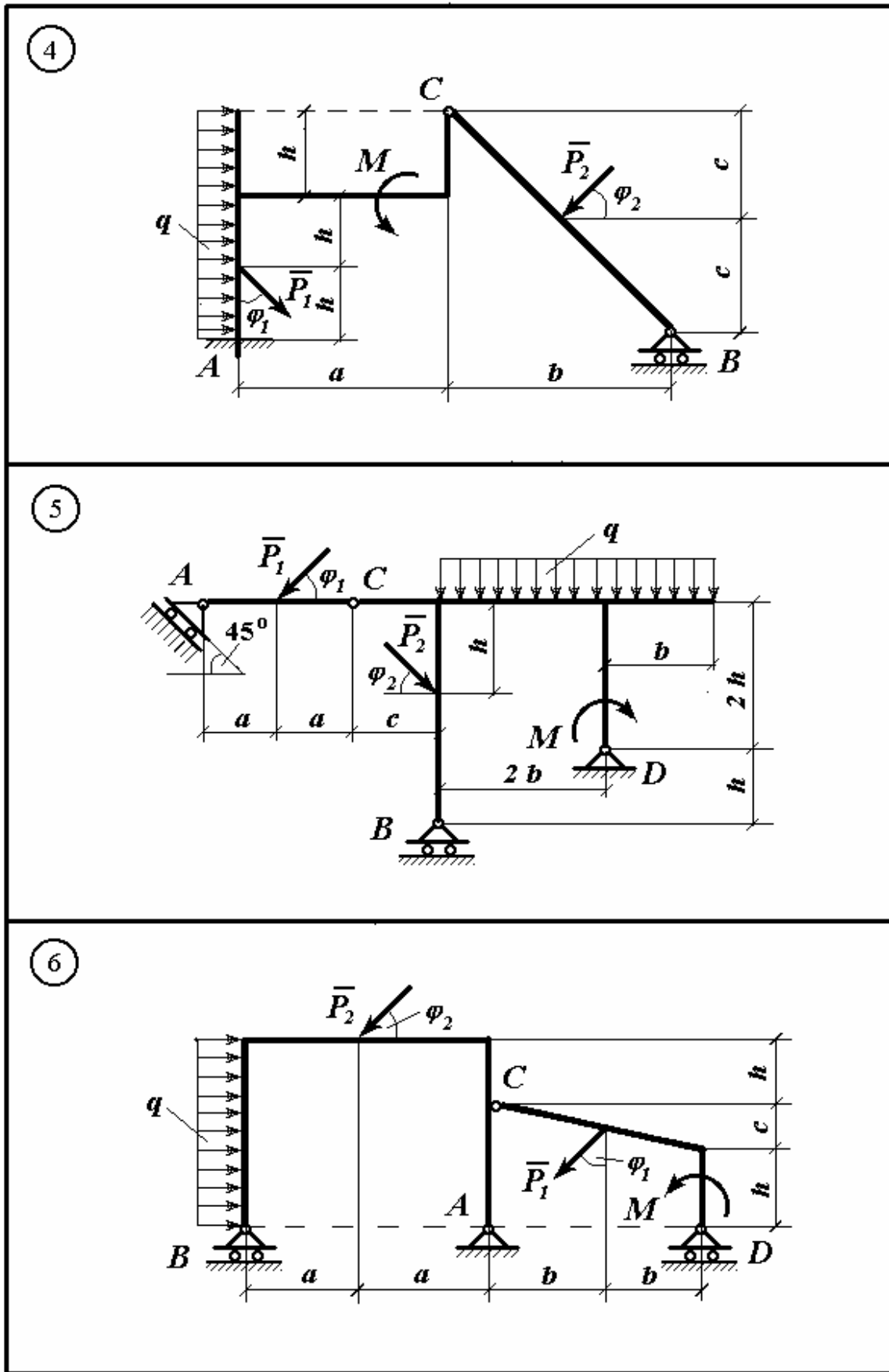


Рисунок 5.2

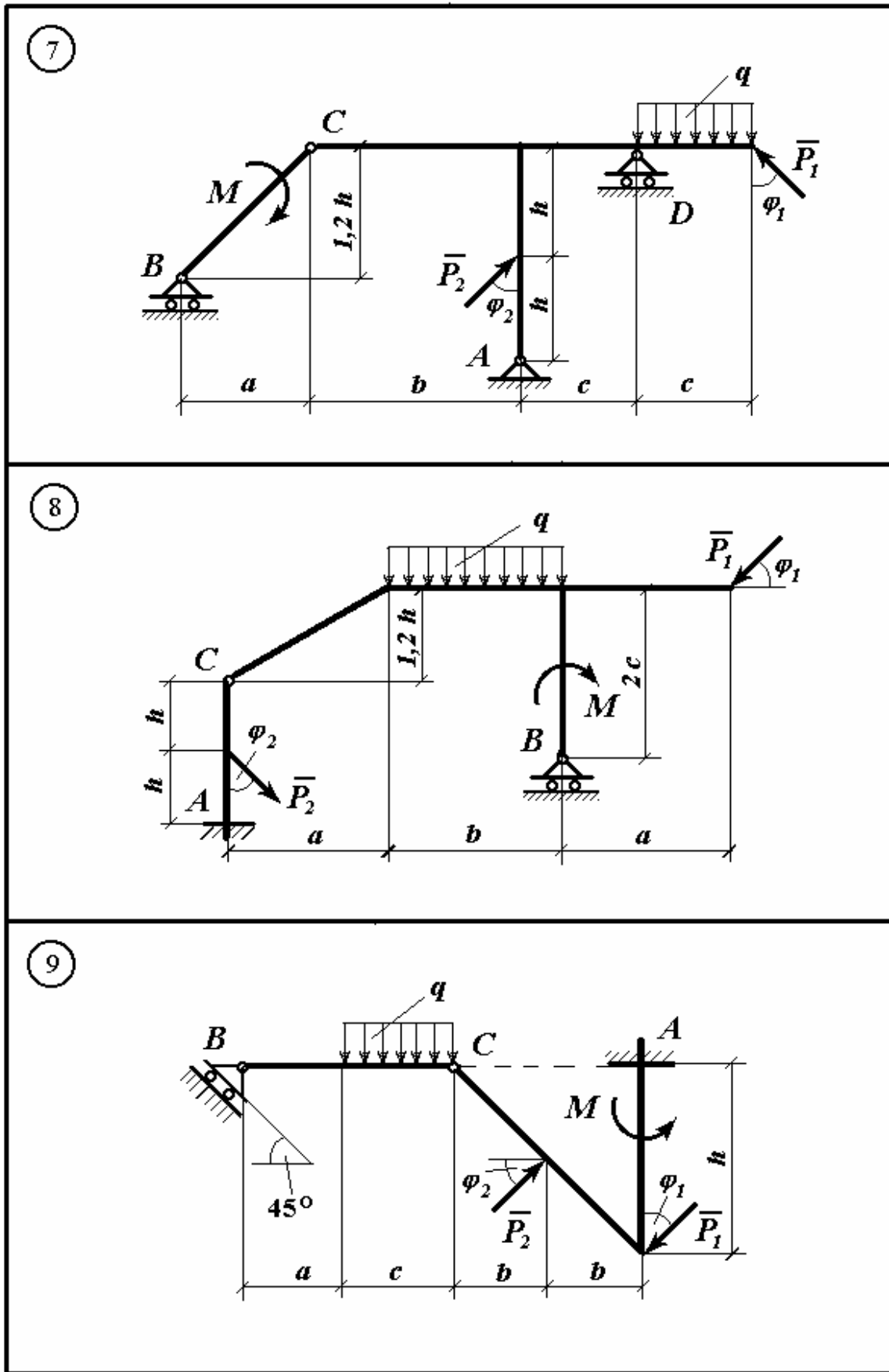


Рисунок 5.3

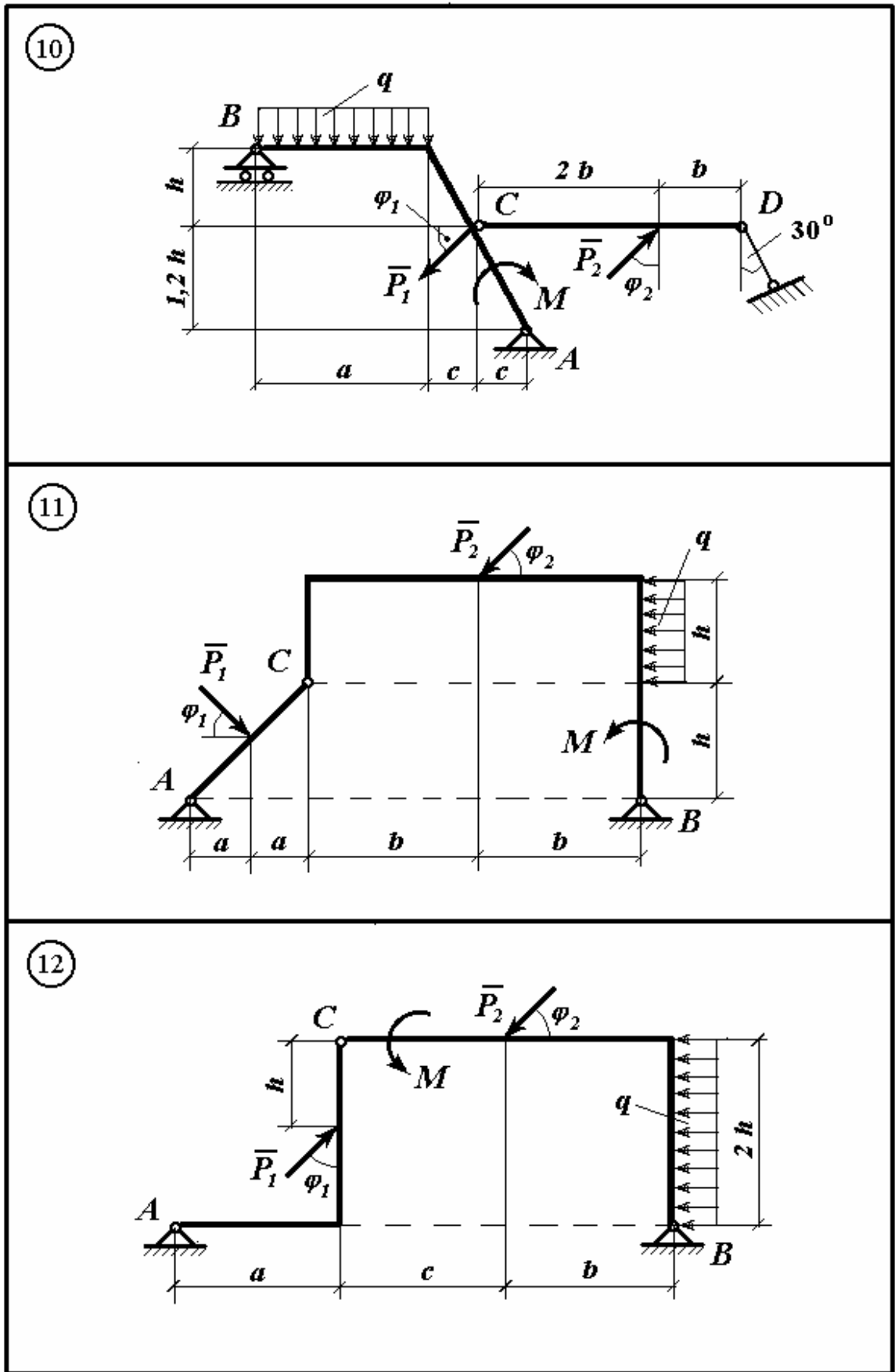
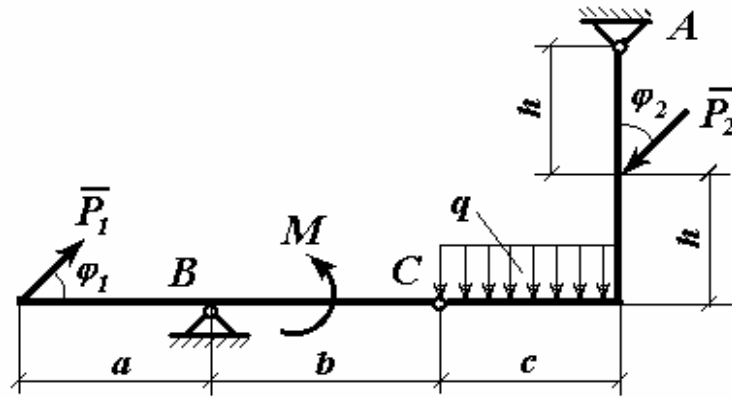
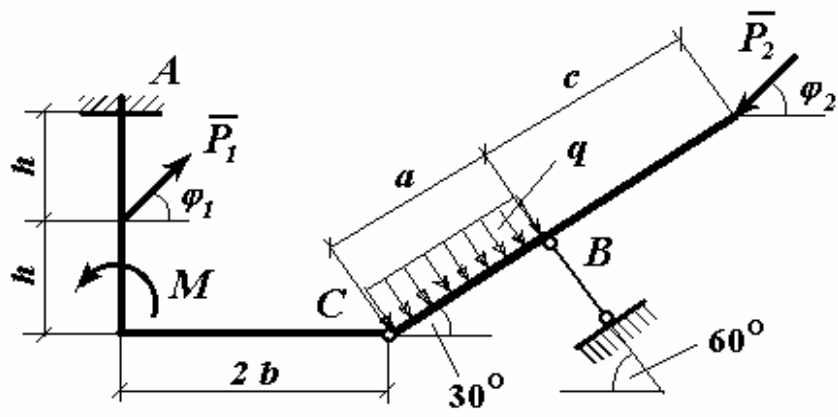


Рисунок 5.4

13



14



15

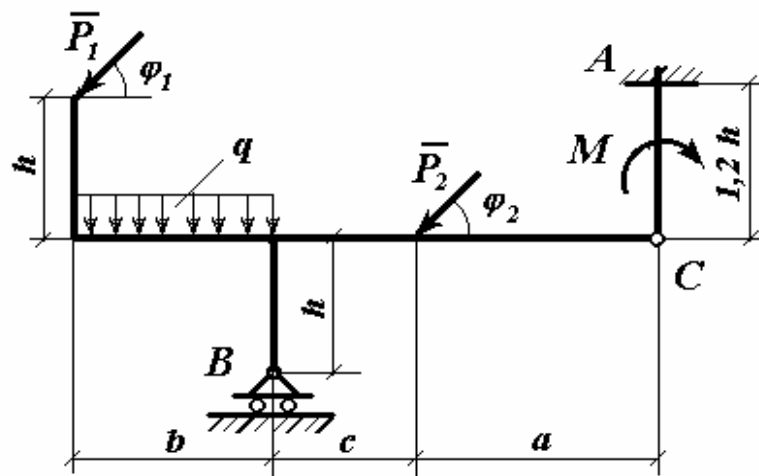


Рисунок 5.5

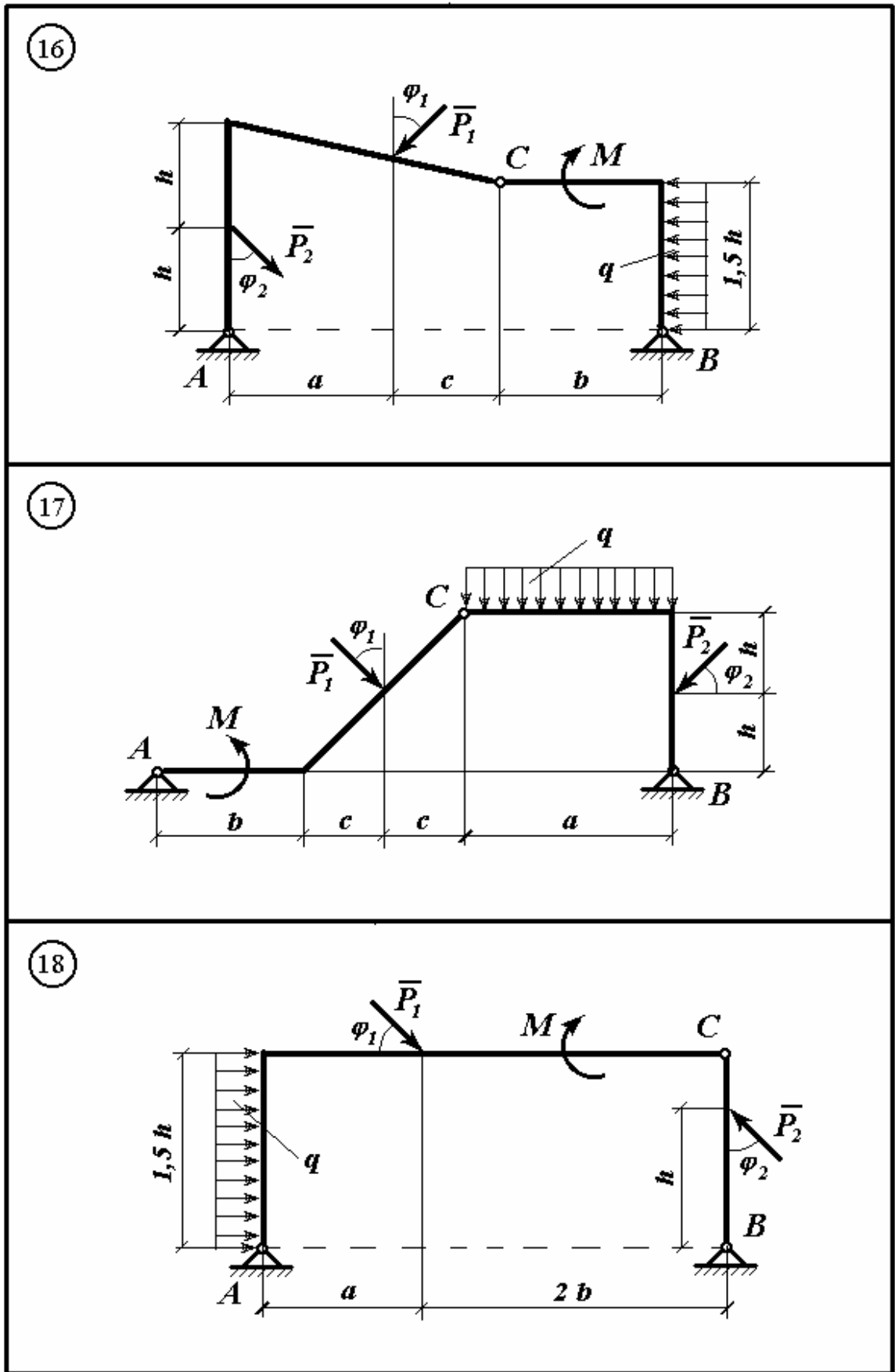
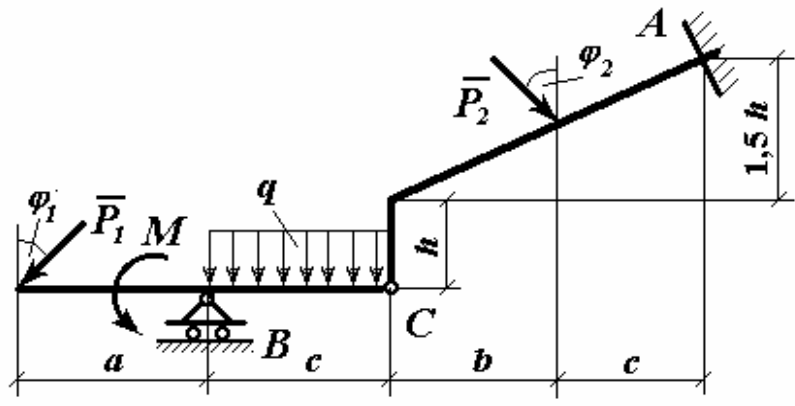
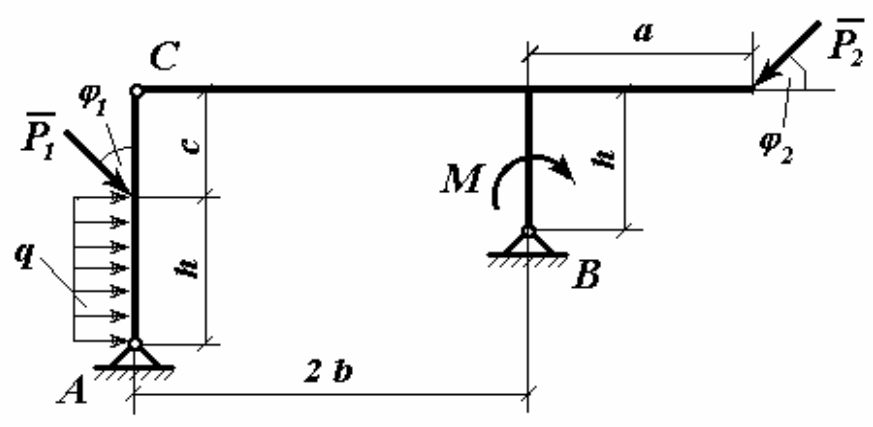


Рисунок 5.6

19



20



21

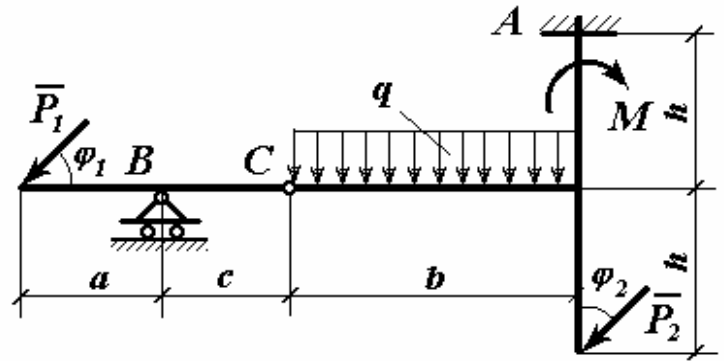
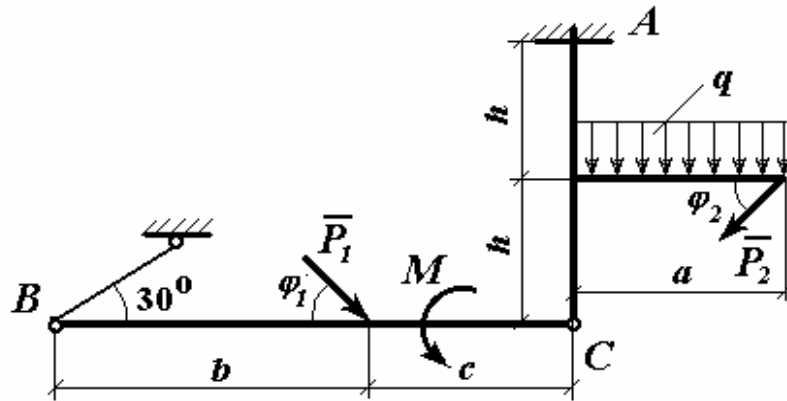
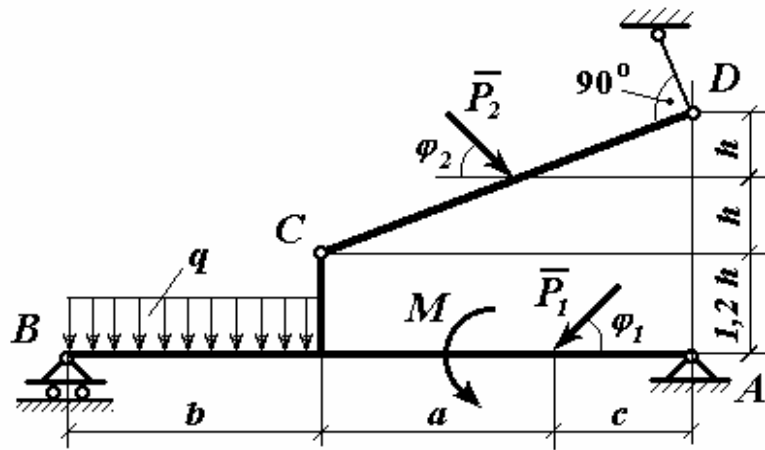


Рисунок 5.7

22



23



24

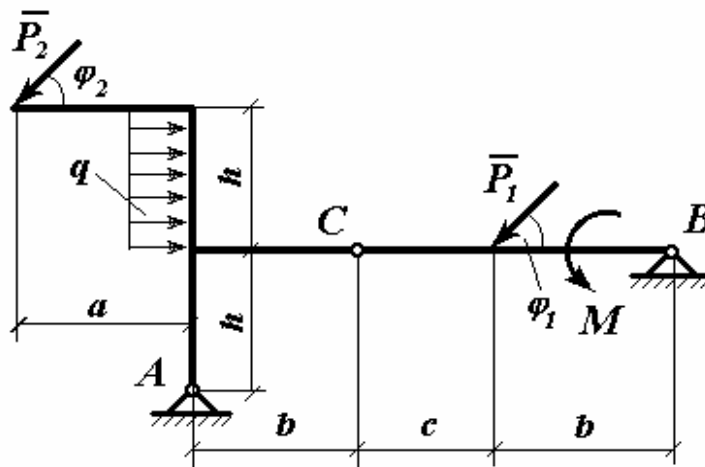


Рисунок 5.8

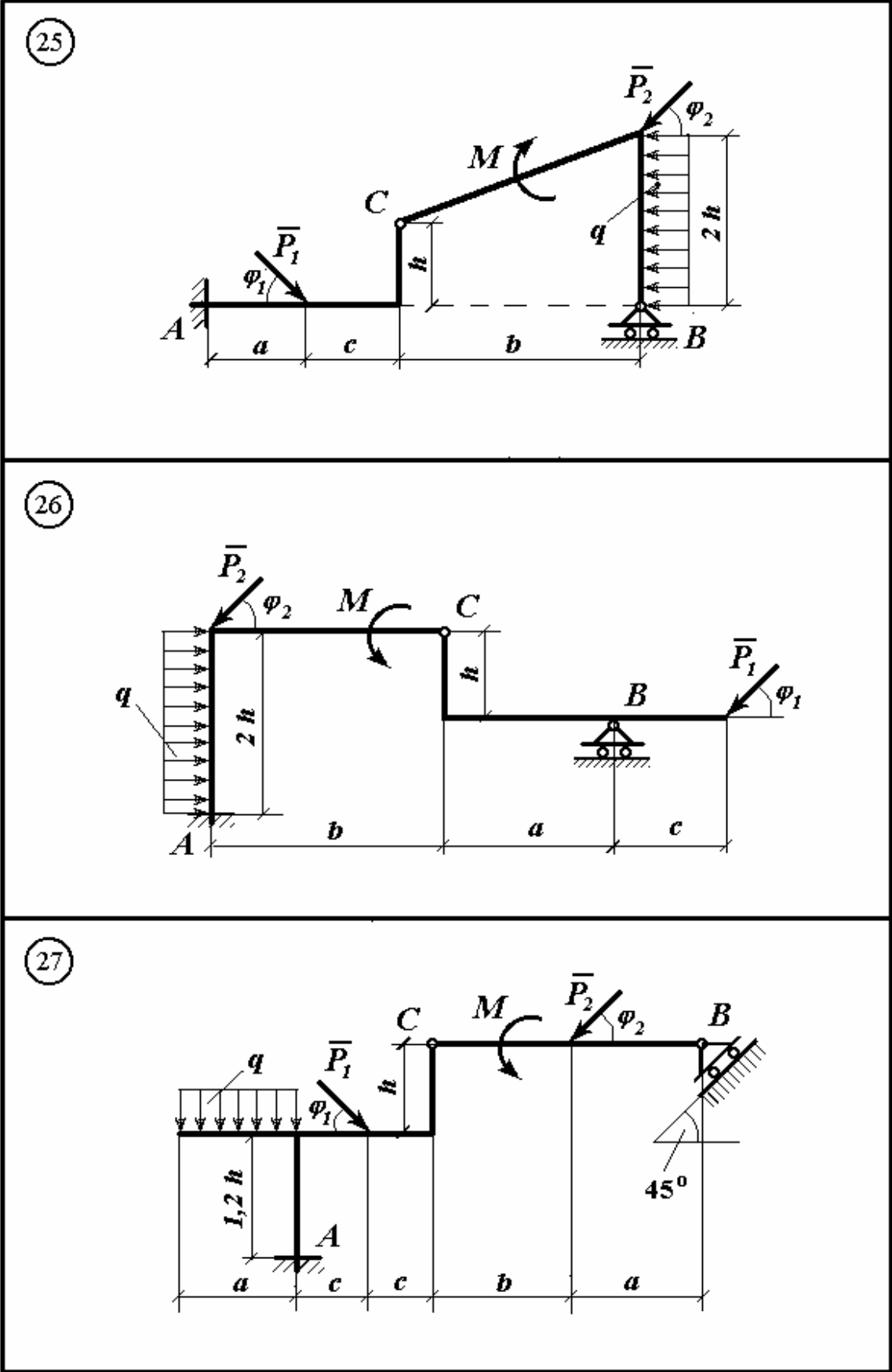
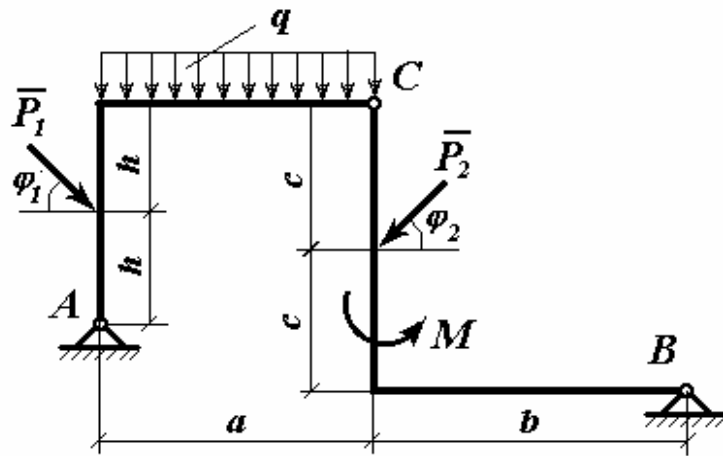
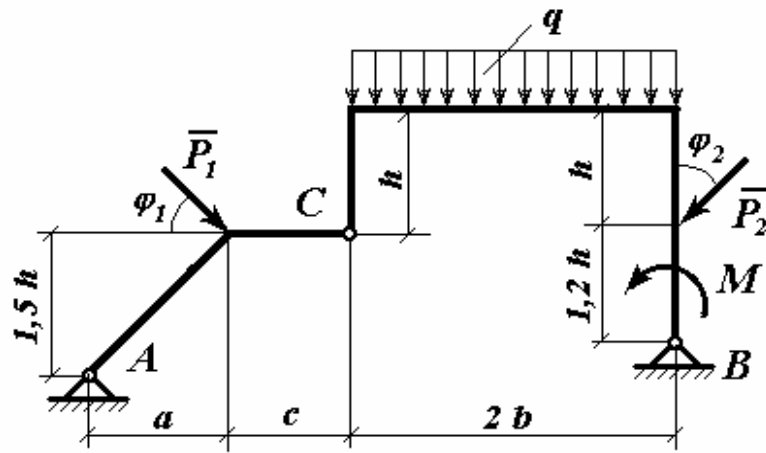


Рисунок 5.9

28



29



30

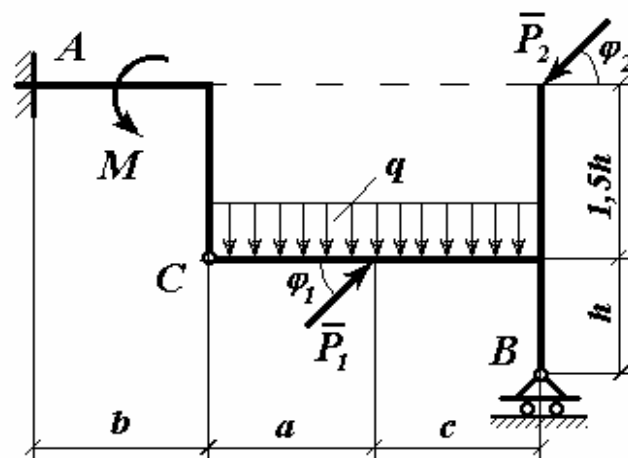


Рисунок 5.10

5.1. Приклад виконання завдання

Дано: Плоска рама, що складається з двох частин, з'єднаних шарніром C , зображена на рис. 5.11.

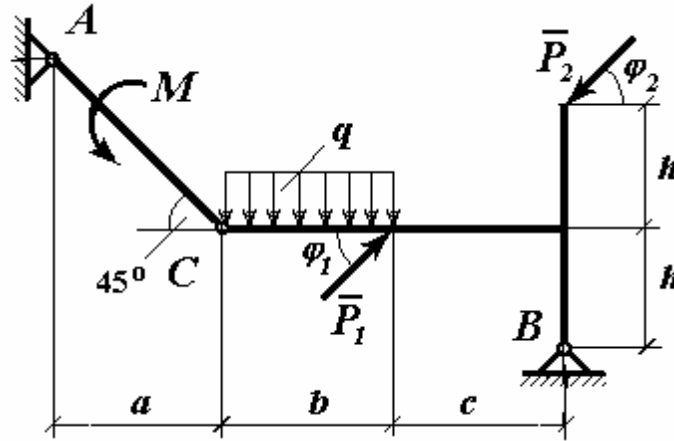


Рисунок 5.11

Величини силових навантажень, розміри і кути мають значення : $P_1 = 9$ кН, $P_2 = 4$ кН, $M = 10$ кН м, $q = 0,5$ кН/м, $a = 7$ м, $b = 4$ м, $c = 3$ м, $h = 2$ м, $\varphi_1 = 15^\circ$. Кут φ_2 є змінним, $\varphi_2 = 0^\circ - 360^\circ$. Знайти опорні реакції R_A і R_B згідно з пунктами 1 - 4 завдання.

Розв'язання. На рис. 5.12 зображаємо раму в плоскій системі координат з навантаженнями і реакціями в опорах.

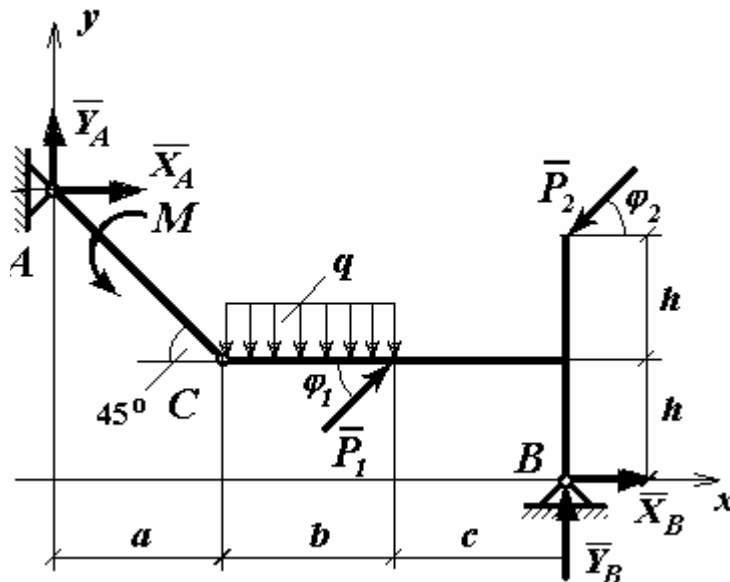


Рисунок 5.12

Обидві опори рами є нерухомими шарнірами, тому реакції R_A і R_B показуємо у вигляді складових X_A , Y_A і X_B , Y_B .

Складаємо рівняння рівноваги для плоскої довільної системи сил

$$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma M_{C_i} = 0.$$

Згідно з рисунком 5.12 вони запишуться :

$$\Sigma X_i = X_A + P_1 \cos \varphi_1 - P_2 \cos \varphi_2 + X_B = 0, \quad (5.1)$$

$$\Sigma Y_i = Y_A - q b + P_1 \sin \varphi_1 - P_2 \sin \varphi_2 + Y_B = 0, \quad (5.2)$$

$$\Sigma M_{C_i} = -Y_A a - X_A \operatorname{tg} a + M - q b^2 / 2 + P_1 \sin \varphi_1 b + \\ + Y_B (b + c) + X_B h + P_2 \cos \varphi_2 h - P_2 \sin \varphi_2 (b + c) = 0. \quad (5.3)$$

Ці три рівняння розв'язати неможливо, так як в них є чотири невідомих. Використаємо їх для перевірки розв'язку. Поставлену задачу розв'яжемо методом розчленування. Розглядаємо раму по частинах, роз'єднавши її по шарніру C . Частина AC збірної конструкції, зображена на рис. 5.13.

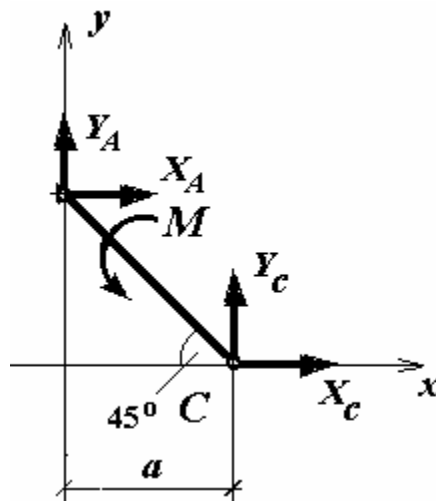


Рисунок 5.13

$$\Sigma X_i = X_A + X_C = 0, \quad (5.4)$$

$$\Sigma Y_i = Y_A + Y_C = 0, \quad (5.5)$$

$$\Sigma M_{A_i} = M + Y_C a + X_C a \operatorname{tg} 45^\circ = 0. \quad (5.6)$$

Розв'язання цих рівнянь також неможливий, бо в них 4 невідомих.

Розглядаємо частину СВ, що зображена на рис. 5.14. Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q приводимо до зосередженої сили Q , яка дорівнює :

$$Q = q b = 0,5 \text{ кН/м} \cdot 4 \text{ м} = 2 \text{ кН} .$$

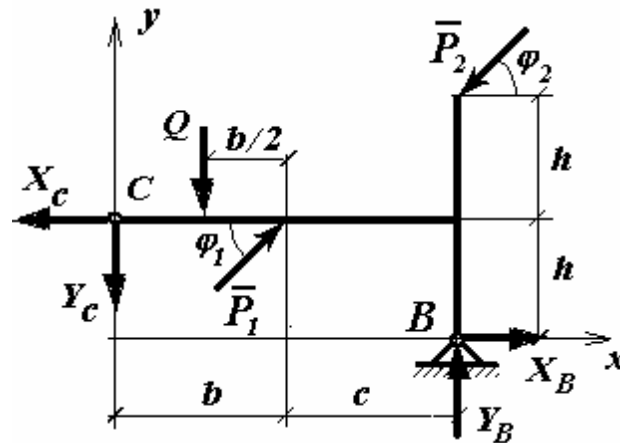


Рисунок 5.14

$$\Sigma X_i = -X_C + P_1 \cos \varphi_1 + X_B - P_2 \cos \varphi_2 = 0 , \quad (5.7)$$

$$\Sigma Y_i = -Y_C - Q + P_1 \sin \varphi_1 + Y_B - P_2 \sin \varphi_2 = 0 , \quad (5.8)$$

$$\Sigma M_{B_i} = Y_C (b + c) + X_C h + Q (c + b/2) - P_1 \sin \varphi_1 c - P_1 \cos \varphi_1 h + P_2 \cos \varphi_2 2h = 0 . \quad (5.9)$$

Рівняння (5.6) і (5.9) розв'язуємо як систему, звідки знаходимо

$$X_C = (K_1 + M(b + c)/a) / (h - (b + c) \operatorname{tg} 45^\circ) , \quad (5.10)$$

$$Y_C = -M/a - X_C \operatorname{tg} 45^\circ , \quad (5.11)$$

де позначено :

$$K_1 = P_1 (c \sin \varphi_1 + h \cos \varphi_1) - 2 P_2 h \cos \varphi_2 - Q (c + b/2) .$$

Тоді з рівнянь (5.4), (5.5) і (5.7), (5.8) знаходимо складові реакцій R_A і R_B

$$X_A = -X_C , \quad (5.12)$$

$$Y_A = -Y_C , \quad (5.13)$$

$$X_B = X_C - P_1 \cos \varphi_1 + P_2 \cos \varphi_2, \quad (5.14)$$

$$Y_B = Y_C + Q - P_1 \sin \varphi_1 + P_2 \sin \varphi_2. \quad (5.15)$$

Модулі реакцій R_A і R_B будуть рівні :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}. \quad (5.16)$$

Перевірка. Опорні реакції знайдені вірно, якщо виконуються аналітичні умови рівноваги для довільної плоскої системи сил, тобто, рівняння (5.1) - (5.3).

За формулами (5.10) - (5.16), а для перевірки за (5.1) - (5.3), складаємо програму "RAMA" на мові BASIC і виконуємо розрахунки на ЕОМ.

```

10 REM "      RAMA
20 PI=3.14
30 P1=9
40 P2=4
50 M=10
60 Q=2
70 A=7
80 B=4
90 C=3
100 H=2
110 F1=PI/12
120 S1=SIN(F1)
130 C1=COS(F1)
140 FOR F2=0 TO 360 STEP 30
150 S2=SIN(F2*PI/180)
160 C2=COS(F2*PI/180)
170 K1=P1*(C*S1+H*C1)-2*P2*H*C2-Q*(C+B/2)
180 XC=(K1+M*(B+C)/A)/(H-(B+C)*TG(PI/4))
190 YC=-M/A-XC*TG(PI/4)
200 XA=-XC
210 YA=-YC
220 XB=XC-P1*C1+P2*C2
230 YB=YC+Q-P1*S1+P2*S2
240 RA=SQR(XA^2+YA^2)
250 RB=SQR(XB^2+YB^2)
260 WX=XA+P1*C1-P2*C2+XB
270 WY=YA-Q+P1*S1-P2*S2+YB
280 K2=YB*(B+C)+XB*H+P2*C2*H-P2*S2*(B+C)
290 MC=-YA*A-XA*A*TG(PI/4)+M-Q*B/2+P1*S1*B+K2
300 PRINT "      KYT      F2="F2
310 PRINT " XA="XA, "YA="YA, "RA="RA
320 PRINT "XB="XB, "YB="YB, "RB="RB

```

```

330 PRINT " ПЕРЕВІРКА"
340 PRINT "WX="WX, "WY="WY, "MC="MC
350 PRINT "-----"
360 NEXT F2
370 END
      KYT      F2=0
XA=-4.185969   YA= 1.428572   RA=4.423025
XB=-5.076733   YB=-1.756789   RB=1.828672
      ПЕРЕВІРКА
WX=0           WY=0           MC=0
      KYT      F2=30
XA=-5.256704   YA=1.428572   RA=5.447362
XB= 2.769423E-02   YB=2.422913   RB= .243869
      ПЕРЕВІРКА
WX=0           WY=0           MC=0
-----
      KYT      F2=330
XA= -5.269472   YA= 1.428572   RA= 5.459685
XB= 0.340786   YB=-3.766894   RB= 3.767048
      ПЕРЕВІРКА
WX=0           WY=0           MC=-9.536743E-07
      KYT      F2=360
XA=-4.186009   YA=1.428572   RA=4.423063
XB=-5.076533   YB=-1.769553   RB=1.840909
      ПЕРЕВІРКА
WX=0           WY=0           MC=0
-----

```

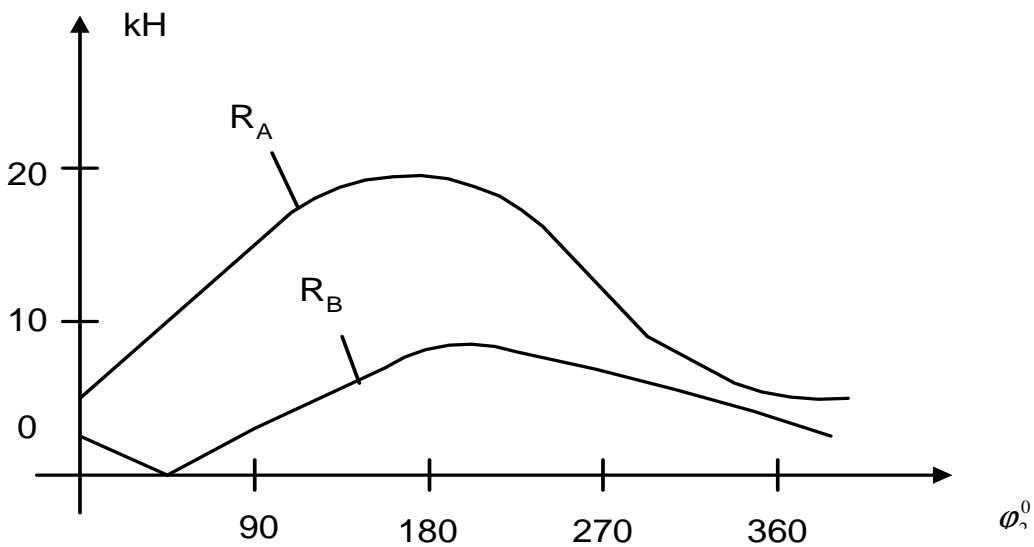


Рисунок 5.15

З рисунка 5.15 знаходимо:

$$R_{Amin} = 5 \text{ кН, при } \alpha = 0, R_{Amax} = 19,2 \text{ кН, при } \alpha = 172^\circ,$$

$$R_{Bmin} = 0, \text{ при } \alpha = 45^\circ, R_{Bmax} = 8 \text{ кН, при } \alpha = 198^\circ.$$

С.6 Рівновага сил з врахуванням зчеплення (тертя спокою)

Визначити критичне значення сили \bar{P} (мінімальне або максимальне) і реакції опор системи, що знаходиться в стані спокою. Схеми варіантів показані на рис. 6.1 – 6.10, а необхідні для розрахунку дані в табл. 6.1.

Зчеплення (тертя спокою) врахувати тільки між гальмівною колодкою та барабаном, а також в двох опорних точках тіла вагою G . Якщо гальмівна колодка не зображена у вигляді штока, то її товщину приймати $e = 0,05$ м.

Таблиця 6.1

Варіант	G	Q ₁	A	в	α	f
	кН		м		град	
1	2,5	22	0,5	0,5	45	0,25
2	8	18	5	1	30	0,35
3	1	16	0,1	0,15	45	0,3
4	1,5	14	3	0,5	60	0,35
5	2,8	20	0,4	0,1	30	0,25
6	3	25	3	0,6	45	0,4
7	2,6	30	0,15	0,25	60	0,5
8	5	35	4	1,2	60	0,4
9	2	15	0,4	0,4	45	0,2
0	3,5	10	3	1	30	0,3

6.1 Приклади виконання завдання

Приклад1. Дано: $G=2$ кН; $Q_1=20$ кН; $f_{зч.}=0,1$; $\alpha=20^\circ$, $a=10$ см; $в=20$ см (рис.6.11). Визначити критичне значення сили P і реакції опор O , A , B і C .

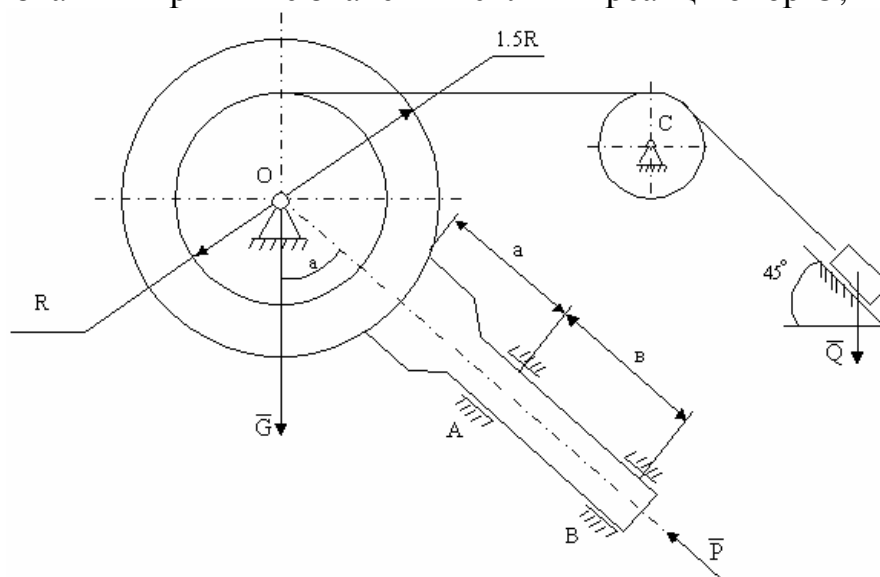
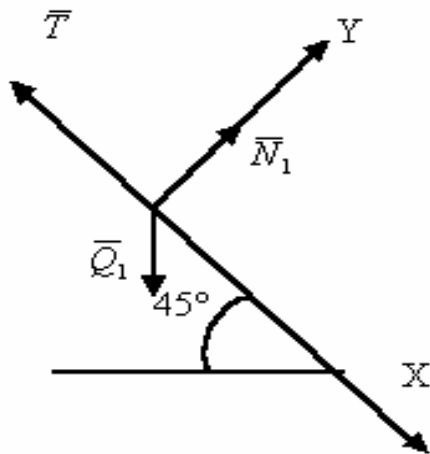


Рисунок 6.11

Розв'язання. Розглянемо систему врівноважених сил, що прикладені до тіла вагою Q_1 (рис.6.12).



На тіло діють сила ваги \bar{Q}_1 , реакція T і нормальна реакція \bar{N}_1 .

Нехтуючи розмірами, розглянемо досліджуване тіло як матеріальну точку і складемо рівняння рівноваги вказаних сил:

$$\sum X_i = 0; Q_1 \cos 45^\circ - T = 0; \quad (6.1)$$

$$\sum Y_i = 0; N_1 - Q_1 \sin 45^\circ = 0; \quad (6.2)$$

Звідси

$$T = Q_1 \cos 45^\circ = 20 - 0.707 = 14.4 \text{ кН};$$

$$N_1 = Q_1 \sin 45^\circ = 20 - 0.707 = 14.4 \text{ кН};$$

Рисунок 6.12

Потім розглянемо рівновагу сил, прикладених до барабана (рис.6.13);

$$\sum X_i = 0; \quad -N_2 \sin \alpha + F_{зч} \cos \alpha + T' + X_0 = 0; \quad (6.3)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -N_2 \cos \alpha + F_{зч} \sin \alpha + Y_0 - G = 0; \quad (6.4)$$

$$\sum M_0(\bar{F}) = 0; \quad -T'R + F_{зч} \cdot 1.5R_0 = 0; \quad (6.5)$$

де $\bar{F}_{зч}$ – сила зчеплення (сила тертя спокою); $T' = -T$ (блок C – ідеальний).

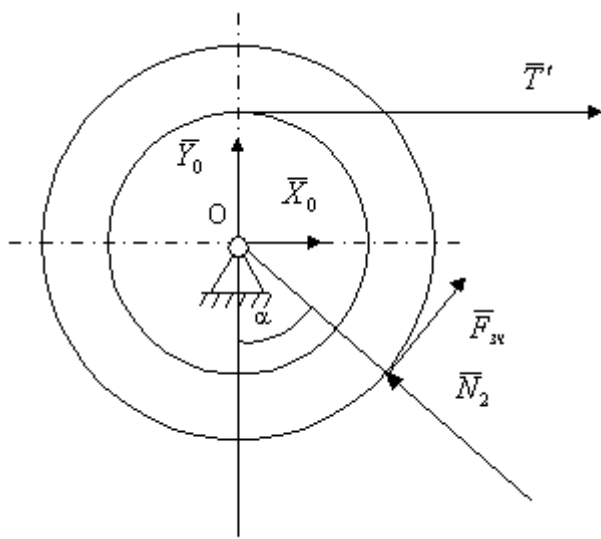


Рисунок 6.13

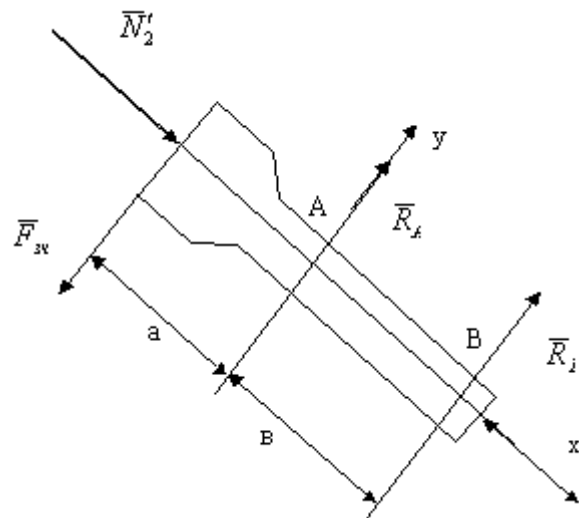


Рисунок 6.14

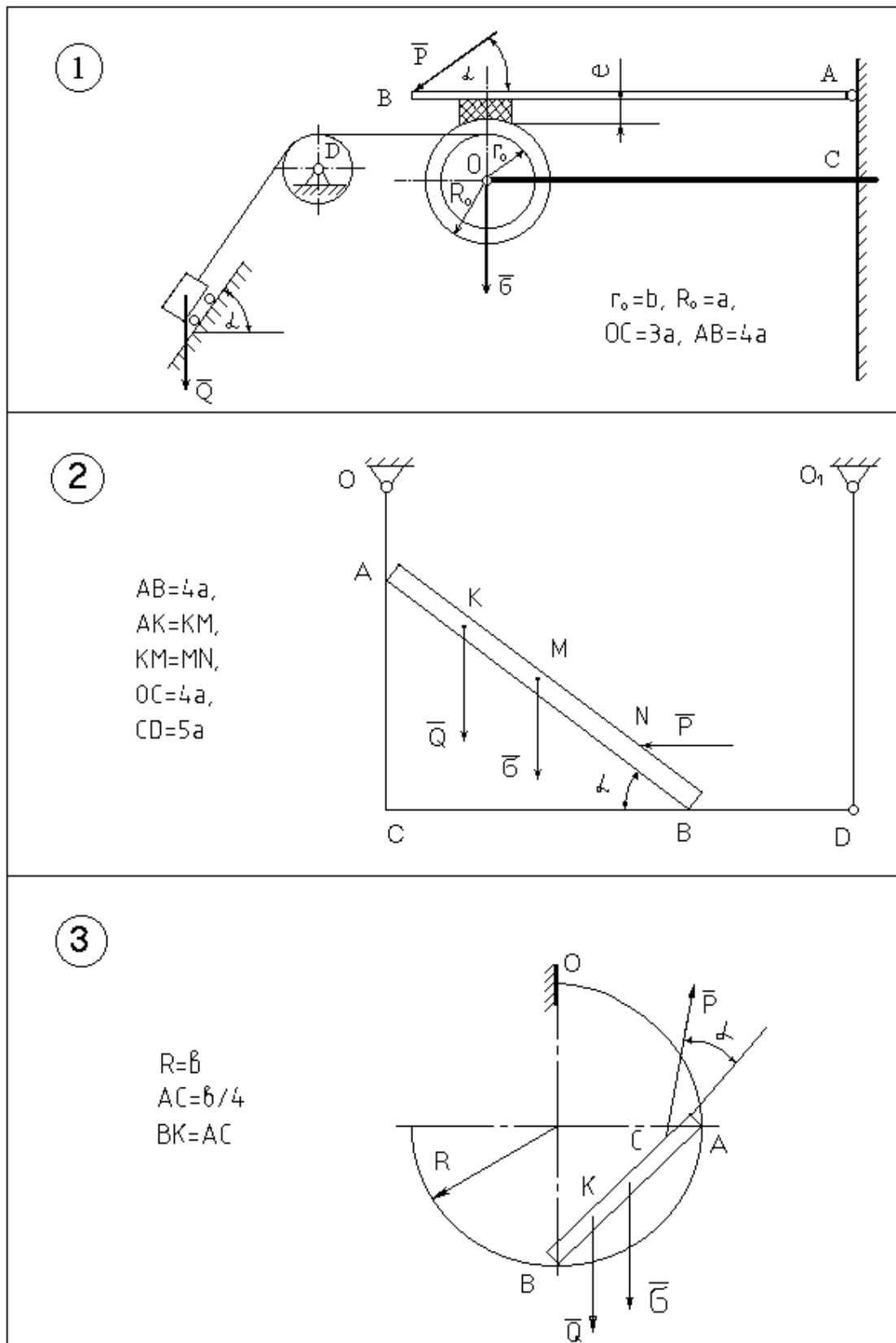


Рисунок 6.1

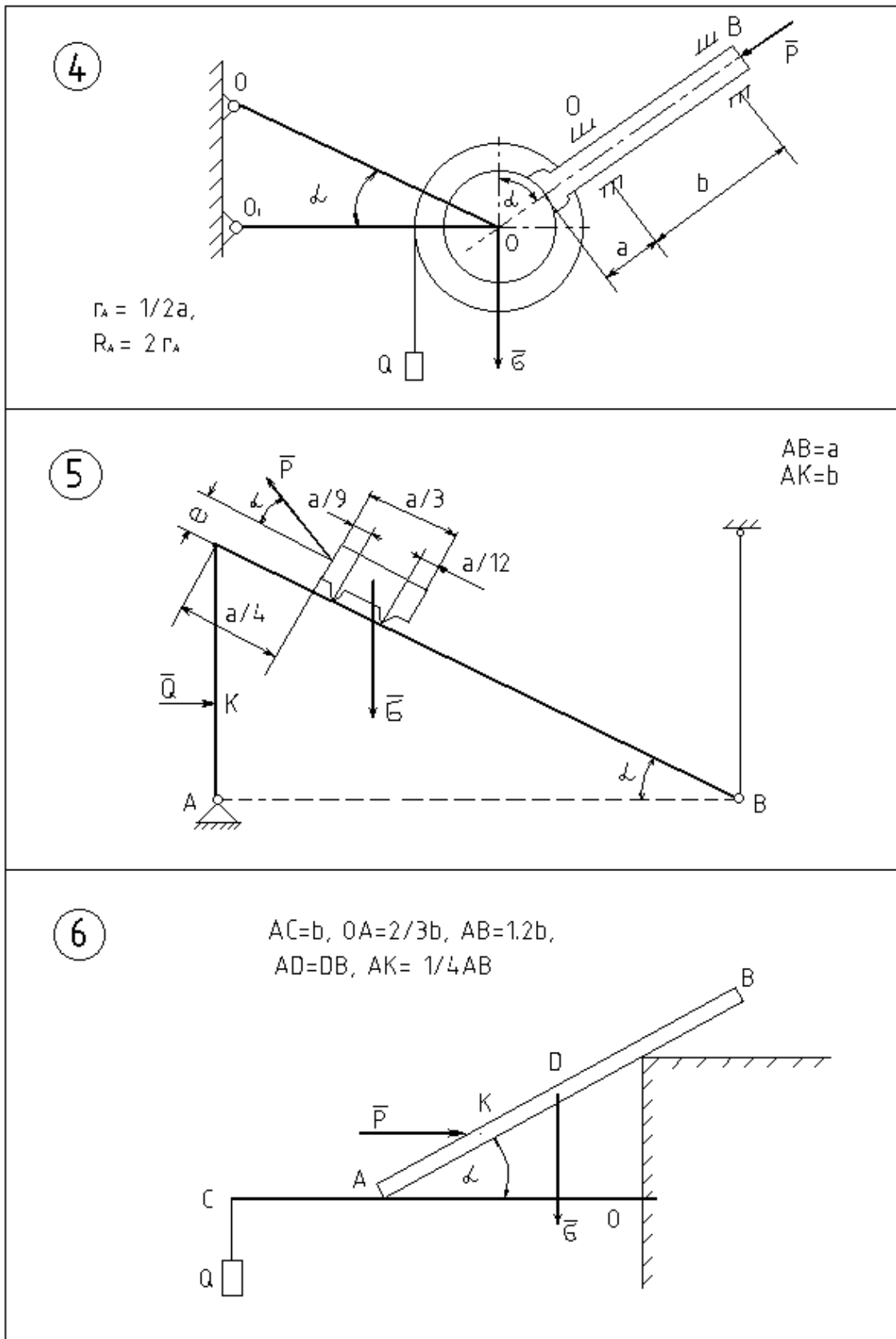


Рисунок 6.2

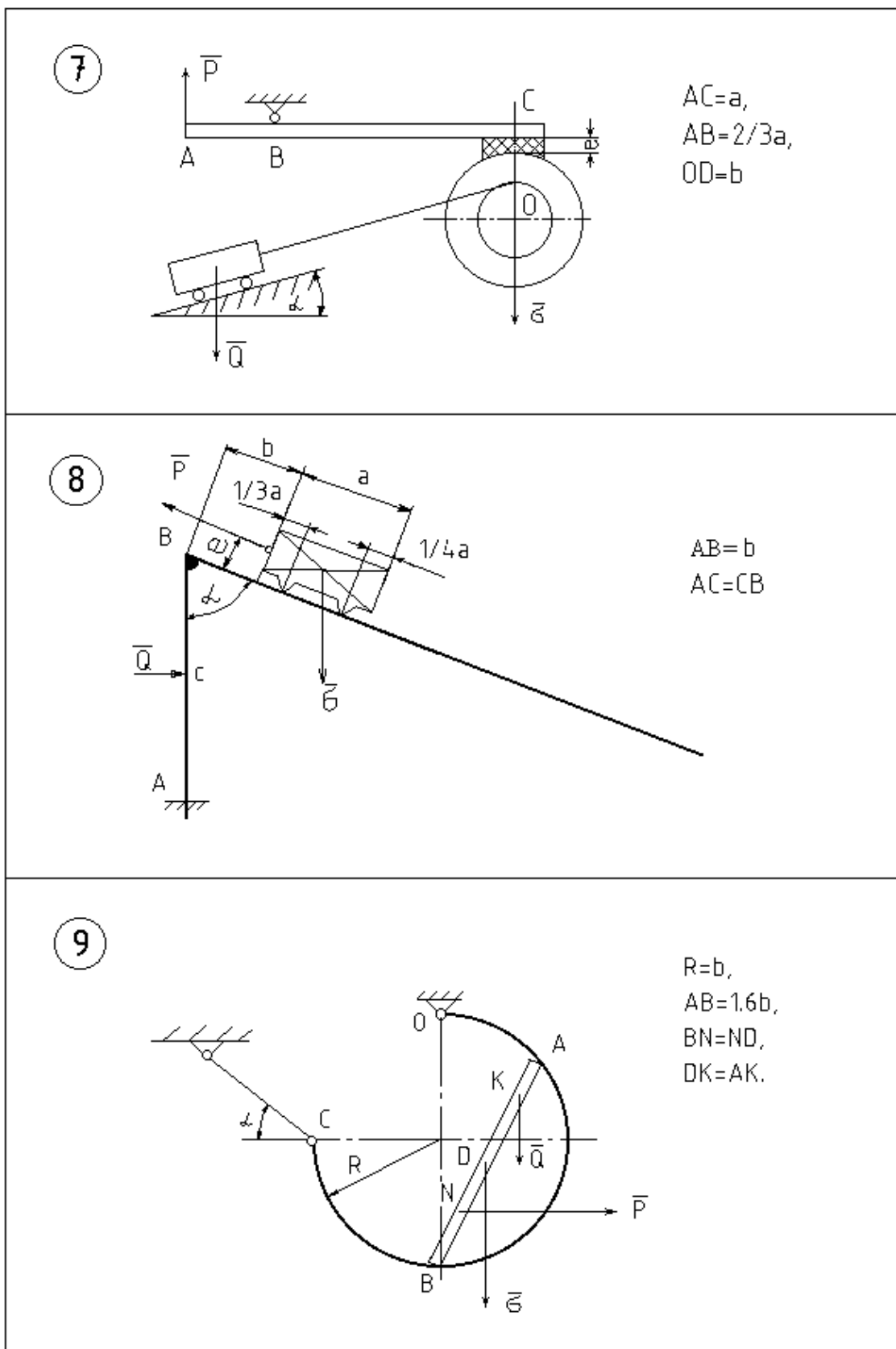
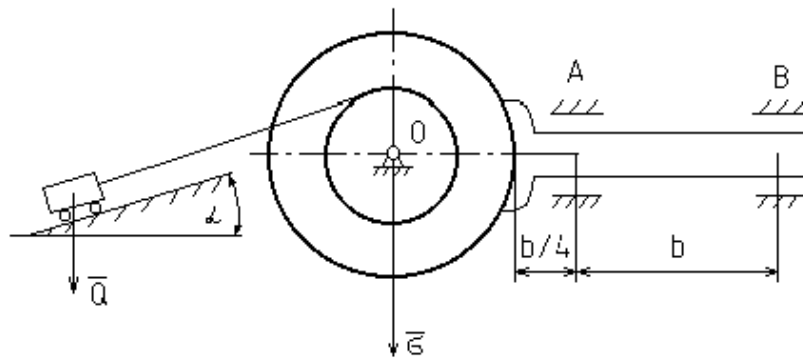


Рисунок 6.3

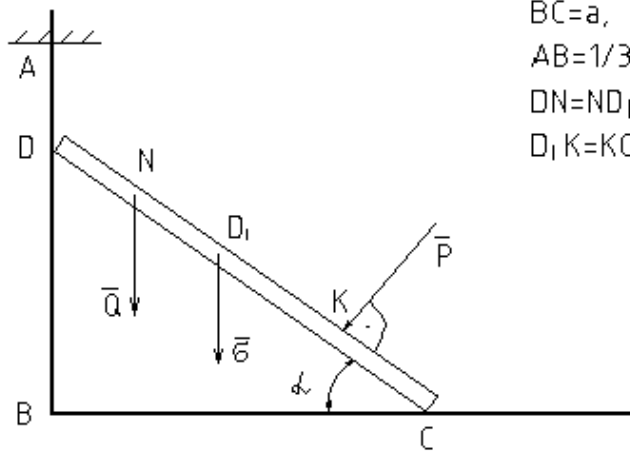
10

$$R_o = a, r_o = 3/4a$$

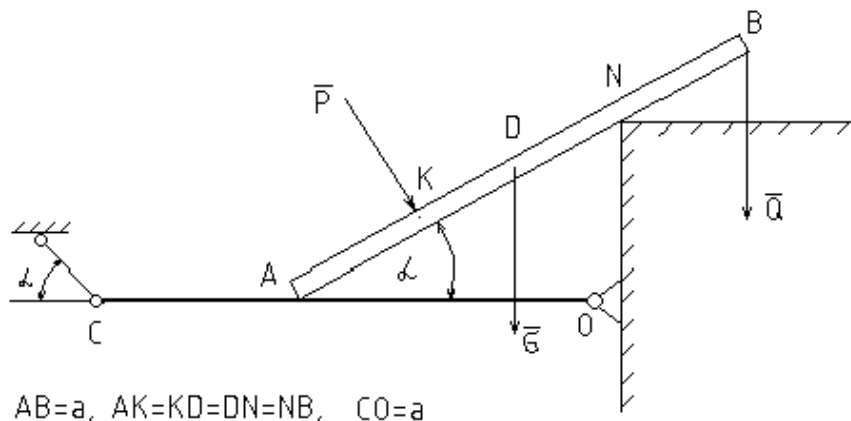


11

$$\begin{aligned} BC &= a, \\ AB &= 1/3a, \\ DN &= ND_1, \\ D_1K &= KC \end{aligned}$$



12



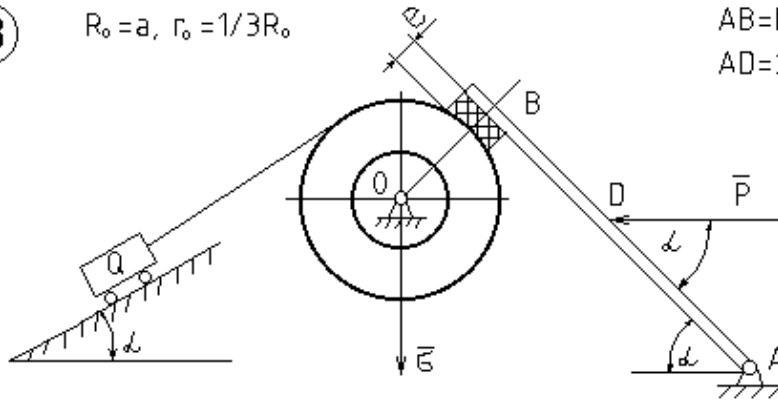
$$AB = a, AK = KD = DN = NB, CO = a$$

Рисунок 6.4

13

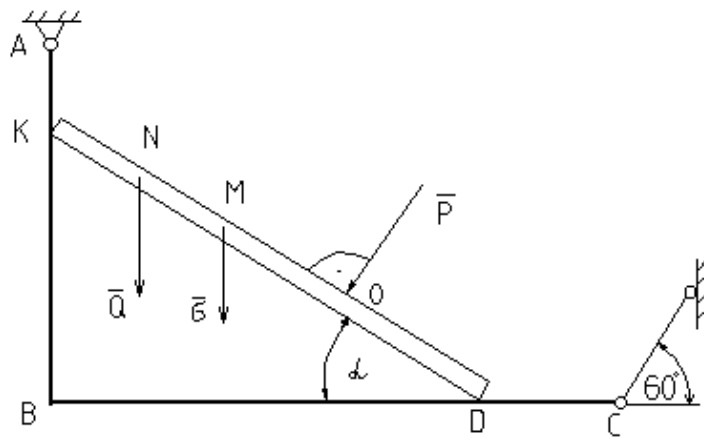
$R_0 = a, r_0 = 1/3R_0$

$AB = b$
 $AD = 2BD$



14

$BD = b, AB = 1.5b, KN = NM = MO = OD$



15

$R = a,$
 $AC = CD,$
 $DN = NB,$
 $AB = 1.6a$

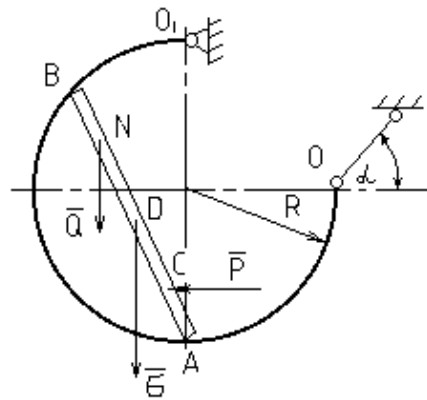
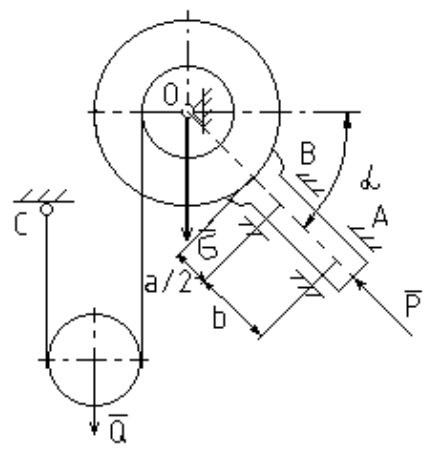


Рисунок 6.5

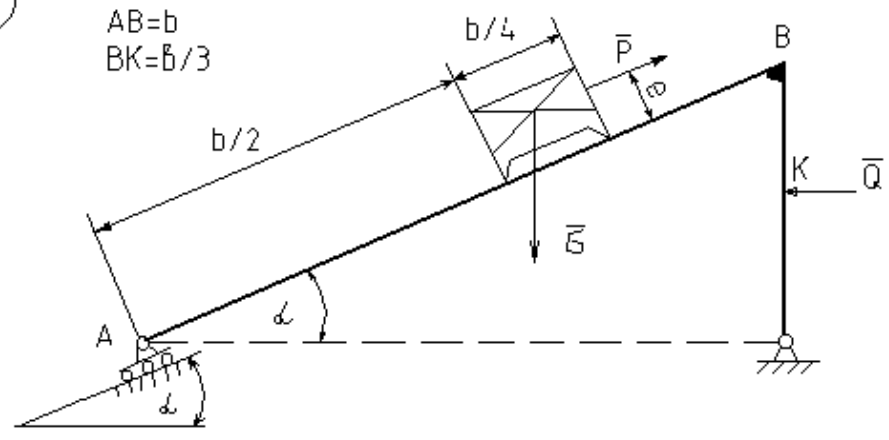
16



$R_0 = a,$
 $r_0 = 1/2 a$

17

$AB = b$
 $BK = b/3$



18

$BC = a, AD = DD_1,$
 $AK = KD, DC = CD_1,$

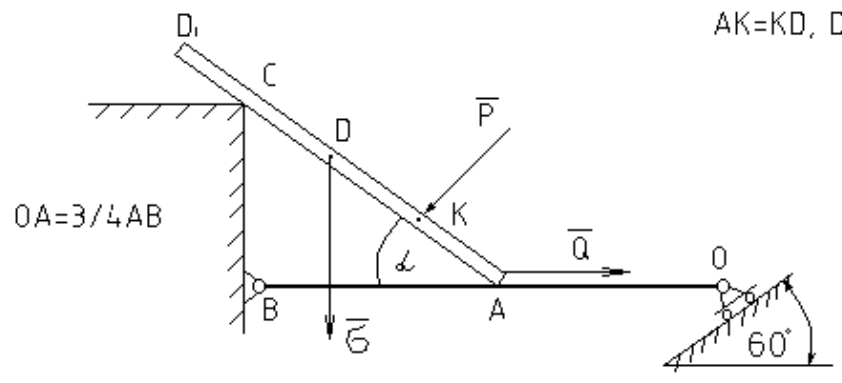
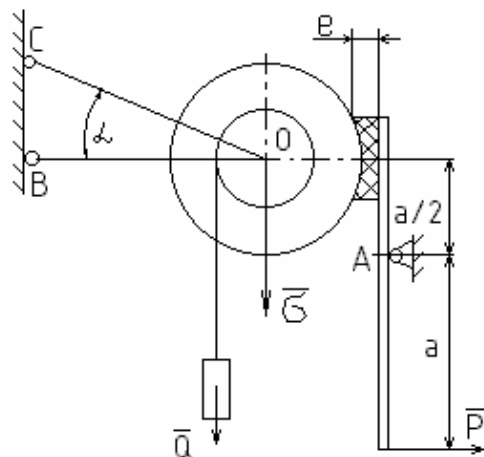


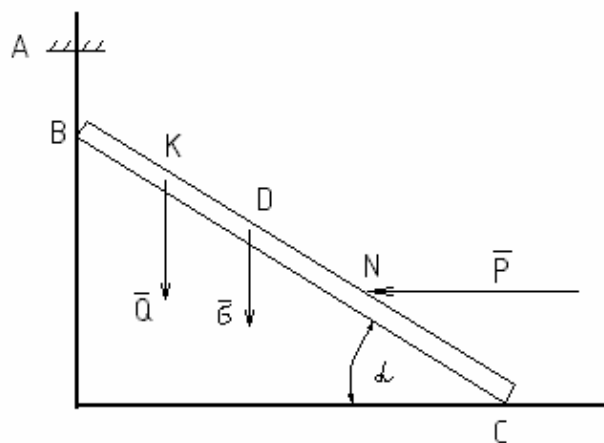
Рисунок 6.6

19



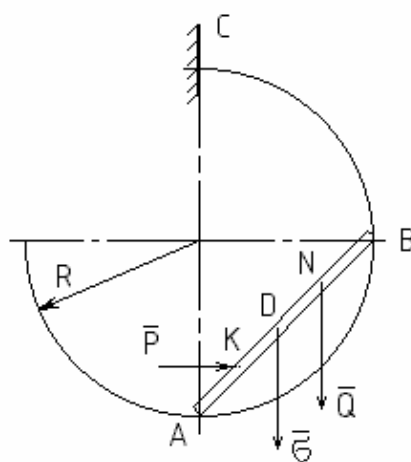
$$R_0 = b,$$
$$r_0 = 1/3b$$

20



$$CB = a,$$
$$AB = 1/3a,$$
$$BK = KD,$$
$$DN = NC$$

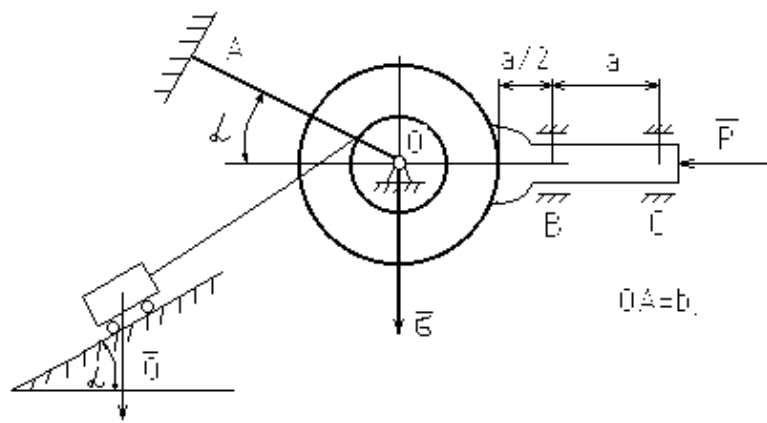
21



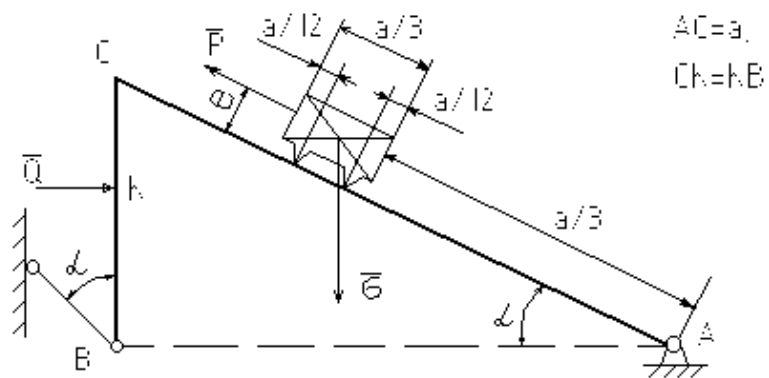
$$AK = KD,$$
$$DN = NB$$

Рисунок 6.7

22



23



24

$OB=b, BK=KO, O_1C=CO,$
 $OA=1.3b.$

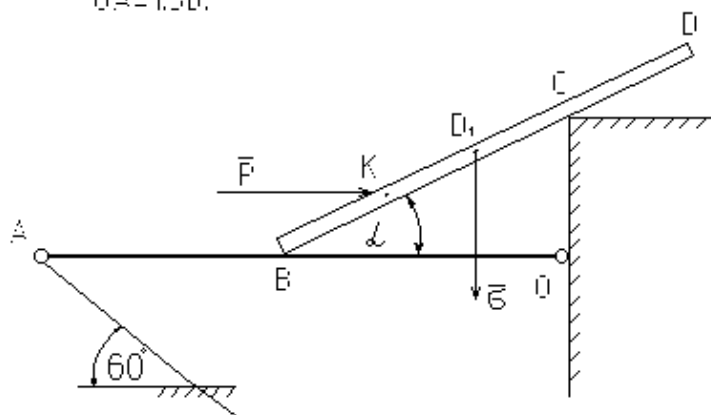
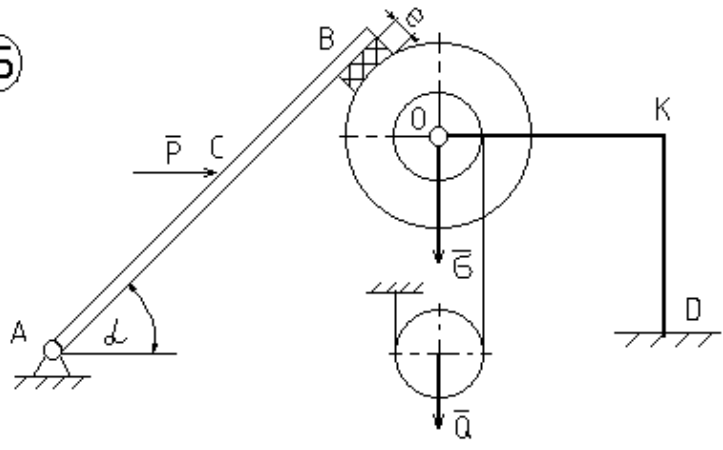


Рисунок 6.8

25

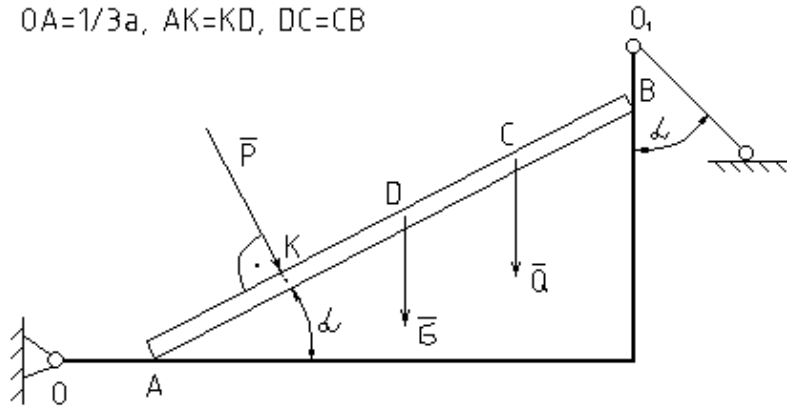


$AB=a,$
 $AC=2CB,$
 $OK=KD=b$

$R_0 = 2r_0 = b/4$

26

$AB=a, BO_1 = 1/4a,$
 $OA = 1/3a, AK=KD, DC=CB$



27

$R=b,$
 $AD=1.5b,$
 $AB=BC,$
 $CK=KD$

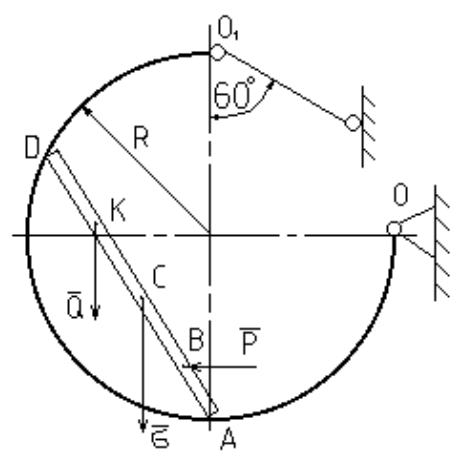


Рисунок 6.9

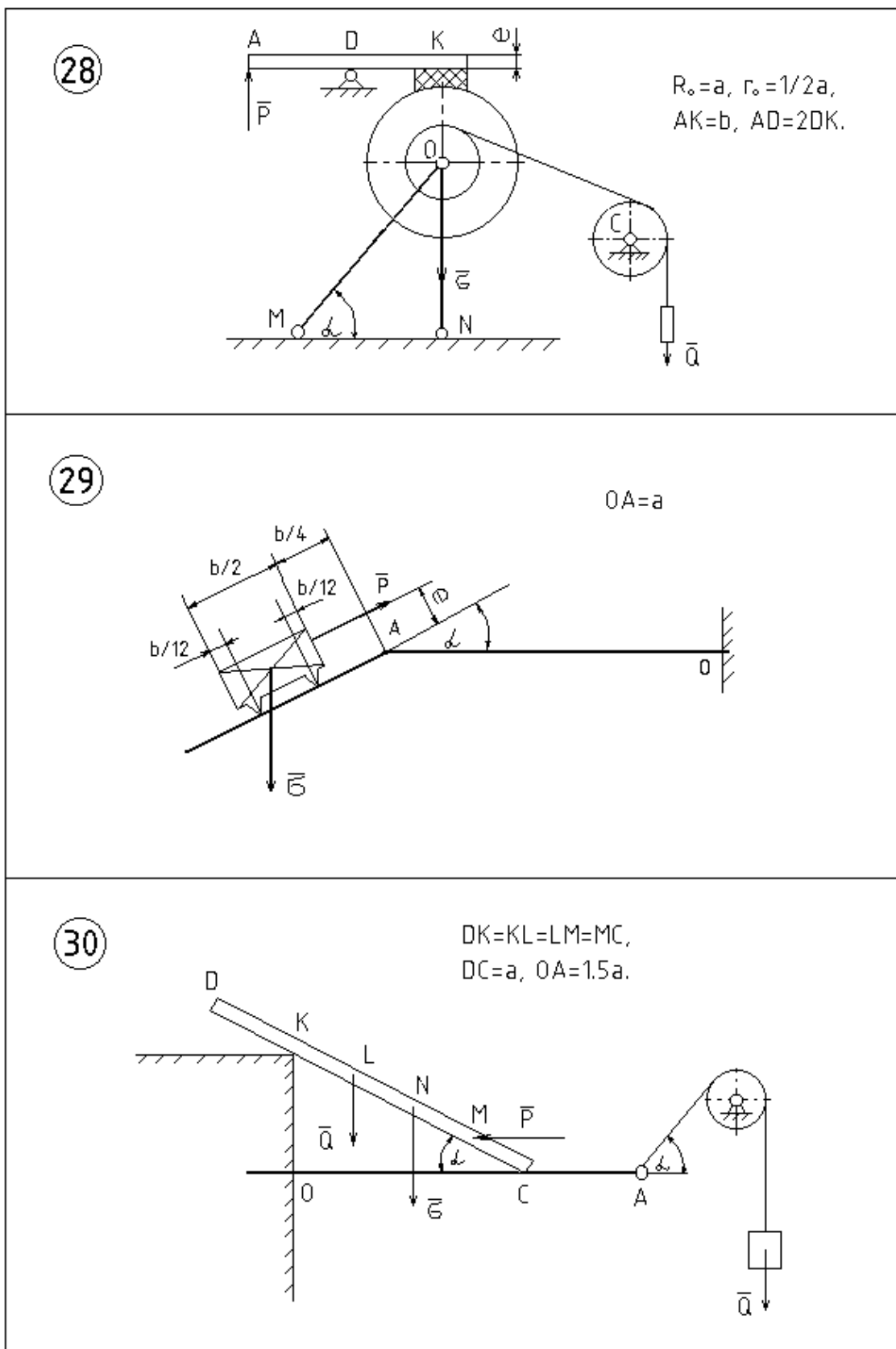


Рисунок 6.10

В стані граничної рівноваги сила P мінімальна, а сила зчеплення (тертя спокою) між гальмівною колодою і барабаном визначається рівністю

$$F_{зч} = f_{зч} \cdot N_2. \quad (6.6)$$

З рівнянь (6.3)– (6.6) отримаємо :

$$\begin{aligned} F_{зч} &= T' / 1,5; & N_2 &= F_{зч} / f_{зч}; \\ X_0 &= -T' - F_{зч} \cos \alpha + N_2 \sin \alpha; \\ Y_0 &= -N_2 \cos \alpha + F_{зч} \sin \alpha + G. \end{aligned}$$

Для визначення мінімального значення сили P і реакцій опори A і B (ці реакції перпендикулярні направляючим A і B , тому що тертям в точках A і B нехтуємо) розглянемо рівновагу сил, прикладених до штока гальмівного пристрою (рис. 6.14):

$$\sum M_0(\bar{F}) = 0; \quad F'_{зч} \cdot a + R_B \cdot b = 0; \quad (6.7)$$

$$\sum X_i = 0; \quad N_2 - P_{\min} = 0; \quad (6.8)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A + R_B - F'_{зч} = 0. \quad (6.9)$$

Розв'язуючи отримані рівняння, маємо

$$R_B = -F'_{зч} \cdot a / b; \quad P_{\min} = N'_2; \quad R_A = -R_B + F'_{зч}.$$

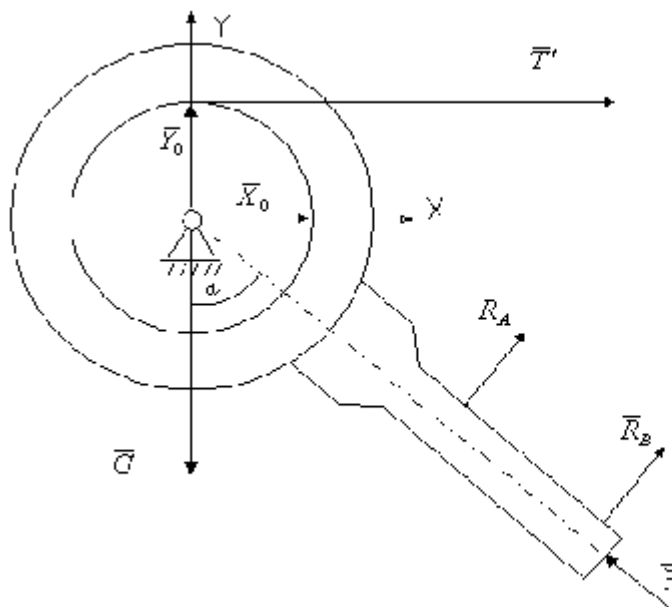


Рисунок 6.15

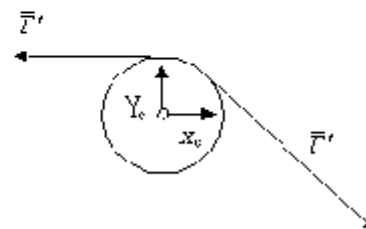


Рисунок 6.16

Враховуючи задані в умові числові значення, отримаємо:

$$\begin{aligned} N_1 &= 14,14 \text{ кН}; & F_{3ч} &= 9,43 \text{ кН}; \\ N_2 &= 94,3 \text{ кН}; & X_0 &= 9,25 \text{ кН}; \\ X_0 &= -89,6 \text{ кН}; & R_B &= -4,7 \text{ кН}; \\ R_A &= 14,14 \text{ кН}; & P_{\min} &= 94 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для перевірки достовірності розв'язку розглянемо рівновагу сил, прикладених до барабана та штока як єдиної механічної системи (рис.6.15)

$$\sum X_i = 0; \quad R_A \cos \alpha + R_B \cos \alpha + X_0 + T' - P \sin \alpha = 0; \quad (6.10)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A \sin \alpha + R_B \sin \alpha + Y_0 - G + P \cos \alpha = 0; \quad (6.11)$$

$$\sum M_0(\bar{F}) = 0; \quad R_A(1,5R + a) + R_B(1,5R + a + b) - T' \cdot R = 0. \quad (6.12)$$

Так, наприклад, з врахуванням знайдених значень R_A , R_B і X_0 з формули (6.10) маємо:

$$14,1 \cos 20^\circ - 4,72 \cos 20^\circ + 9,25 + 14,14 - 94 \sin 20^\circ = -0,01.$$

Для визначення реакції опори C достатньо скласти рівняння рівноваги сил, прикладених до блока (рис.6.16)

$$\sum X_i = 0; \quad -T + T' \cos 45^\circ + X_C = 0; \quad (6.13)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_C - T' \sin 45^\circ = 0. \quad (6.14)$$

Розв'язуючи рівняння (6.13) і (6.14), знаходимо:

$$X_C = T - T' \cos 45^\circ = 4,14 \text{ кН};$$

$$Y_C = T' \sin 45^\circ = 10 \text{ кН}.$$

Приклад 2. Дано $G=1 \text{ кН}$; $f_{3ч}=0,4$; $a=6 \text{ м}$; $b=2 \text{ м}$ (рис.6.17). Визначити значення сили P і реакції в точках А,В,Д і Е при критичній рівновазі конструкції.

Розв'язання. Розглянемо спочатку систему врівноважених сил, прикладених до тіла вагою G (рис.6.18). До тіла прикладена сила ваги \bar{G} , сила \bar{P} , нормальні складові реакції \bar{N}_D і \bar{N}_E , а також дотичні складові сили зчеплення $\bar{F}_{3ч(D)}$ і $\bar{F}_{3ч(E)}$ (сили тертя спокою).

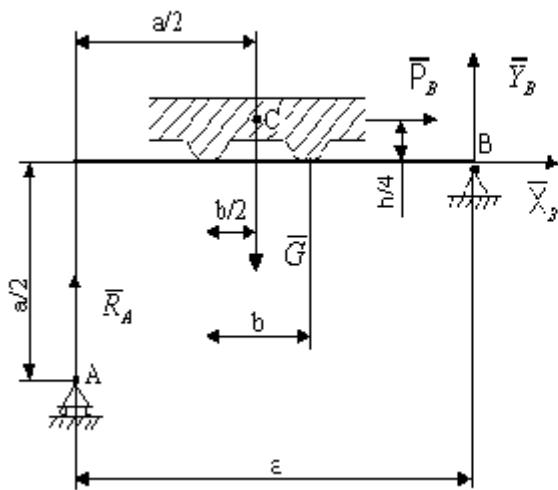


Рисунок 6.17

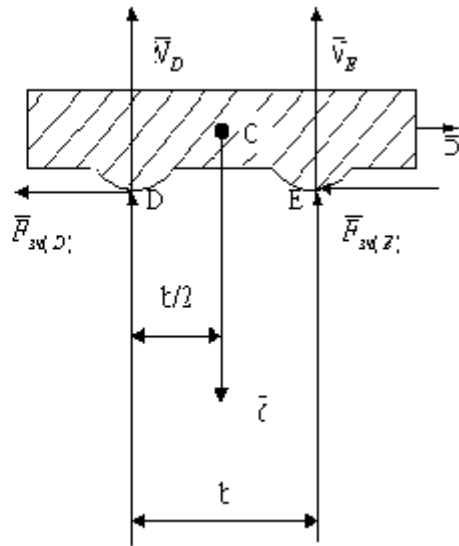


Рисунок 6.18

Складемо три рівняння рівноваги вказаних сил (рис 6.18):

$$\sum X_i = 0; \quad -F_{зч(D)} - F_{зч(E)} + P = 0; \quad (6.15)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_D + N_E - G = 0; \quad (6.16)$$

$$\sum M_0(\bar{F}) = 0; \quad G \cdot b/2 + N_E b - P \cdot b/4 = 0. \quad (6.17)$$

У випадку граничної рівноваги $P = P_{\max}$. У цьому випадку сили зчеплення (сили тертя спокою) приймають екстремальні значення, а система рівнянь (6.15)-(6.17) доповнюється рівностями:

$$F_{зч(D)} = f_{зч} \cdot N_D; \quad (6.18)$$

$$F_{зч(E)} = f_{зч} \cdot N_E. \quad (6.19)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (6.15)-(6.19), отримаємо:

$$P_{\max} = f_{зч} \cdot G;$$

$$N_E = (G/2)(1 + 0,5 \cdot f_{зч});$$

$$N_D = (G/2)(1 - 0,5 \cdot f_{зч}).$$

Звідки, з врахуванням числових даних маємо:

$$P_{\max} = 0,4кН;$$

$$N_D = 0,4кН;$$

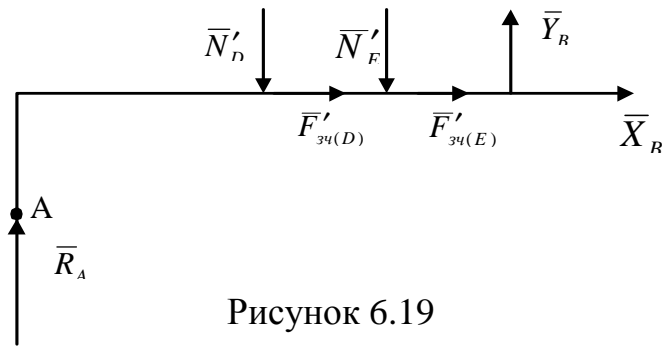
$$F_{зч(D)} = 0,16кН;$$

$$N_E = 0,6кН;$$

$$F_{зч(E)} = 0,24кН.$$

Сукупність \bar{N}_D і $\bar{F}_{зч(D)}$, \bar{N}_E і $\bar{F}_{зч(E)}$ створюють відповідно опорні реакції в точках D і E.

Розглянемо рівновагу тіла АВ (рис.6.19). До нього прикладені реакції в'язей R_A , X_B , Y_B , нормальні складові реакції \bar{N}'_D і \bar{N}'_E , а також дотичні складові сили зчеплення $\bar{F}'_{зч(D)}$ і $\bar{F}'_{зч(E)}$



$$\begin{aligned} \bar{N}'_D &= -\bar{N}_D; \\ \bar{F}'_{3ч(D)} &= -\bar{F}_{3ч(D)}; \\ \bar{N}'_E &= -\bar{N}_E; \\ \bar{F}'_{3ч(E)} &= -\bar{F}_{3ч(E)}. \end{aligned}$$

Рисунок 6.19

Складемо три рівняння рівноваги вказаних сил:

$$\sum X_i = 0; \quad X_B + \bar{F}'_{3ч(D)} + \bar{F}'_{3ч(E)} = 0; \quad (6.20)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A - N'_D - N'_E + Y_B = 0; \quad (6.21)$$

$$\sum M_B(F) = 0; \quad -R_A + N'_D(a/2 + b/2) + N'_E(a/2 - b/2) = 0. \quad (6.22)$$

Розв'язуючи (6.20)-(6.22), отримаємо:

$$R_A = (N'_D(a+b)/2 + N'_E(a-b)/2)/a;$$

$$Y_B = -R_A + N'_D + N'_E;$$

$$X_B = -(\bar{F}'_{3ч(D)} + \bar{F}'_{3ч(E)}).$$

Звідки:

$$R_A = 0.467 \text{ кН};$$

$$Y_B = 0.533 \text{ кН};$$

$$X_B = -0,4 \text{ кН}.$$

Для того, щоб впевнитись в достовірності розв'язку, розглянемо рівновагу системи сил $\bar{R}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{G}$, і $P = P_{\max}$ прикладених до всієї системи (рис 6.10):

$$\sum X_i = 0; \quad X_B + P_{\max} = 0; \quad (6.23)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A - G + Y_B = 0; \quad (6.24)$$

$$\sum M_B(F) = 0; \quad -P_{\max} \cdot b/4 + G \cdot b/2 - R_A \cdot a = 0; \quad (6.25)$$

Розв'язуючи рівняння (6.23)-(6.25) отримаємо:

$$X_B = -P_{\max};$$

$$R_A = (G \cdot b/2 - P_{\max} \cdot b/4)/a;$$

$$Y_B = G - R_A.$$

Звідки впевнюємось у вірності отримання числових значень для R_A, X_B та Y_B .

З наведених прикладів можна зробити висновок, що розв'язання задачі можна проводити за допомогою різних підходів. Тобто можна розглядати рівновагу окремих складових конструкції або рівновагу однієї частини конструкції і всієї конструкції.

С.7 Розрахунок опорних реакцій просторової конструкції

До невагомої жорсткої плити ABCD(рис.7.1-7.5) прикладені сили F_1, F_2 і пара сил з моментом M , що діє в площині плити . Опорами плити є : в т. А - просторовий шарнір , в т. В - циліндричний шарнір і в т. С стержень ОС.

Належність сил F_1, F_2 до площин вказується на рисунках за варіантами, а їх напрямок і напрямок стержня ОС визначається кутами γ , β і ϕ . Геометричні розміри плити і положення точок прикладання сил вказується розмірами a , b , c , d .

Дані для розрахунків приводяться в таблиці 7. 1, де сили задані в Н, момент в Нм, кути в градусах, а розміри в сантиметрах .

Знайти модулі реакцій опор в точках А, В , С при рівновазі плити і показати на графіку їх залежність від змінного кута, що помічений в таблиці 7.1 (*), який змінюється в межах від 0° до 360° .

Таблиця 7. 1.

Варіант	F_1	F_2	M	A	b	c	d	γ	β	ϕ
1	15	5	22	6	4	2	3	30	*	45
2	6	8	18	8	5	3	2	*	15	20
3	12	14	14	10	3	1	4	75	*	60
4	8	3	10	12	5	3	3	45	30	*
5	7	8	15	9	8	4	2	*	20	75
6	11	10	19	14	6	2	3	60	*	15
7	4	12	10	10	8	4	3	15	75	*
8	10	7	14	16	7	5	2	*	60	30
9	8	5	16	11	5	3	3	30	*	20
0	9	6	17	15	8	4	2	20	45	*

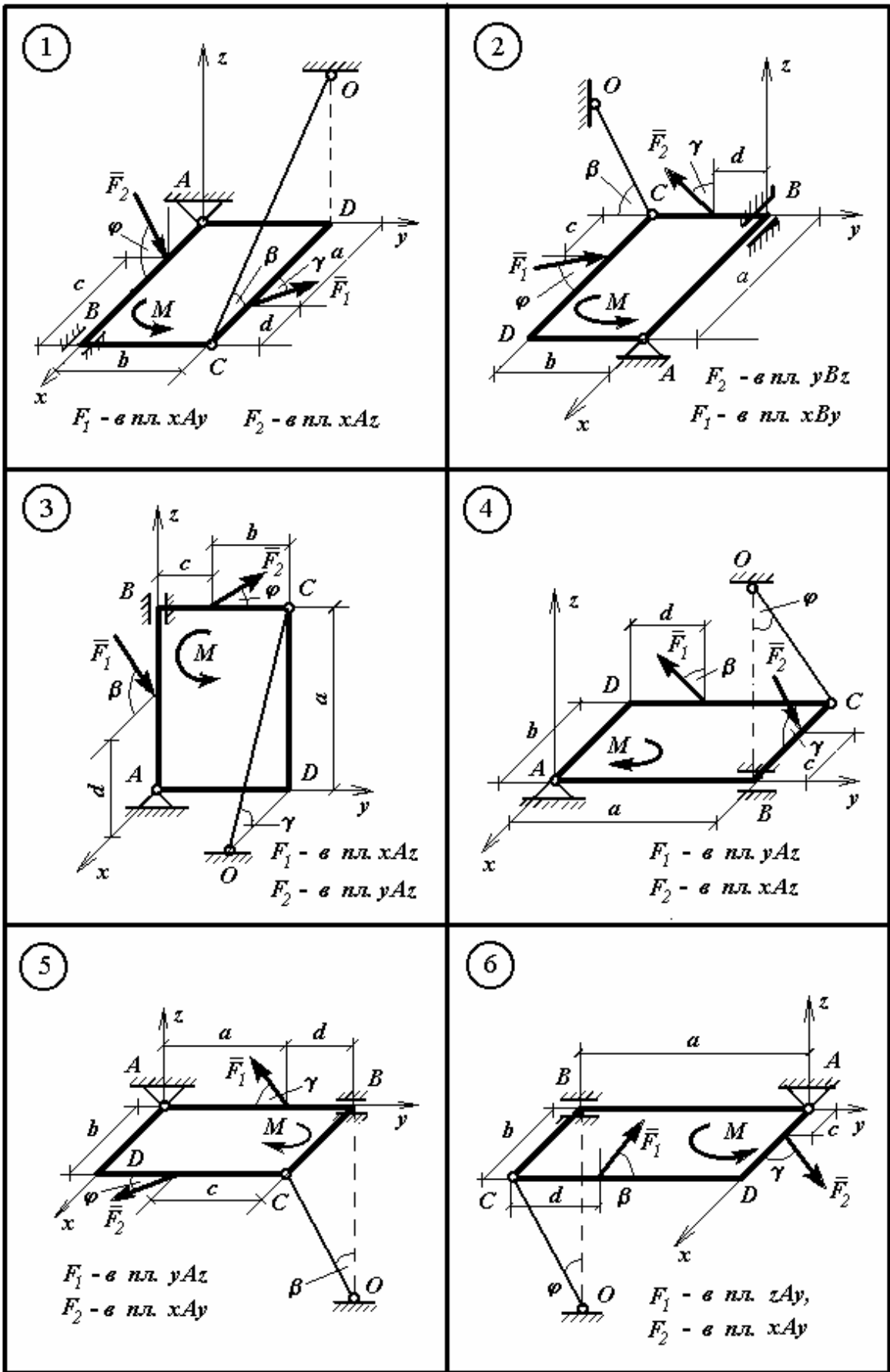


Рисунок 7.1

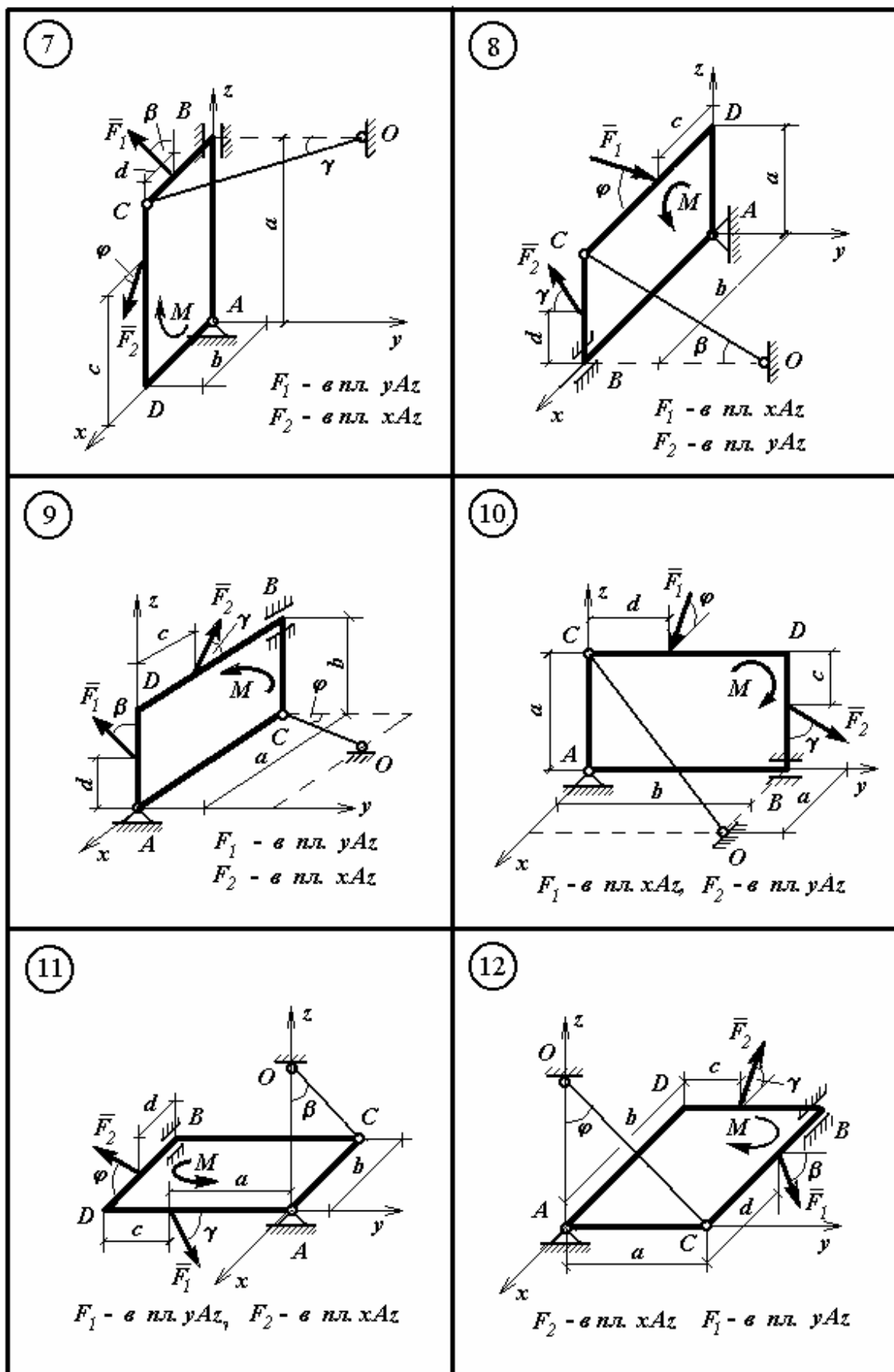


Рисунок 7.2

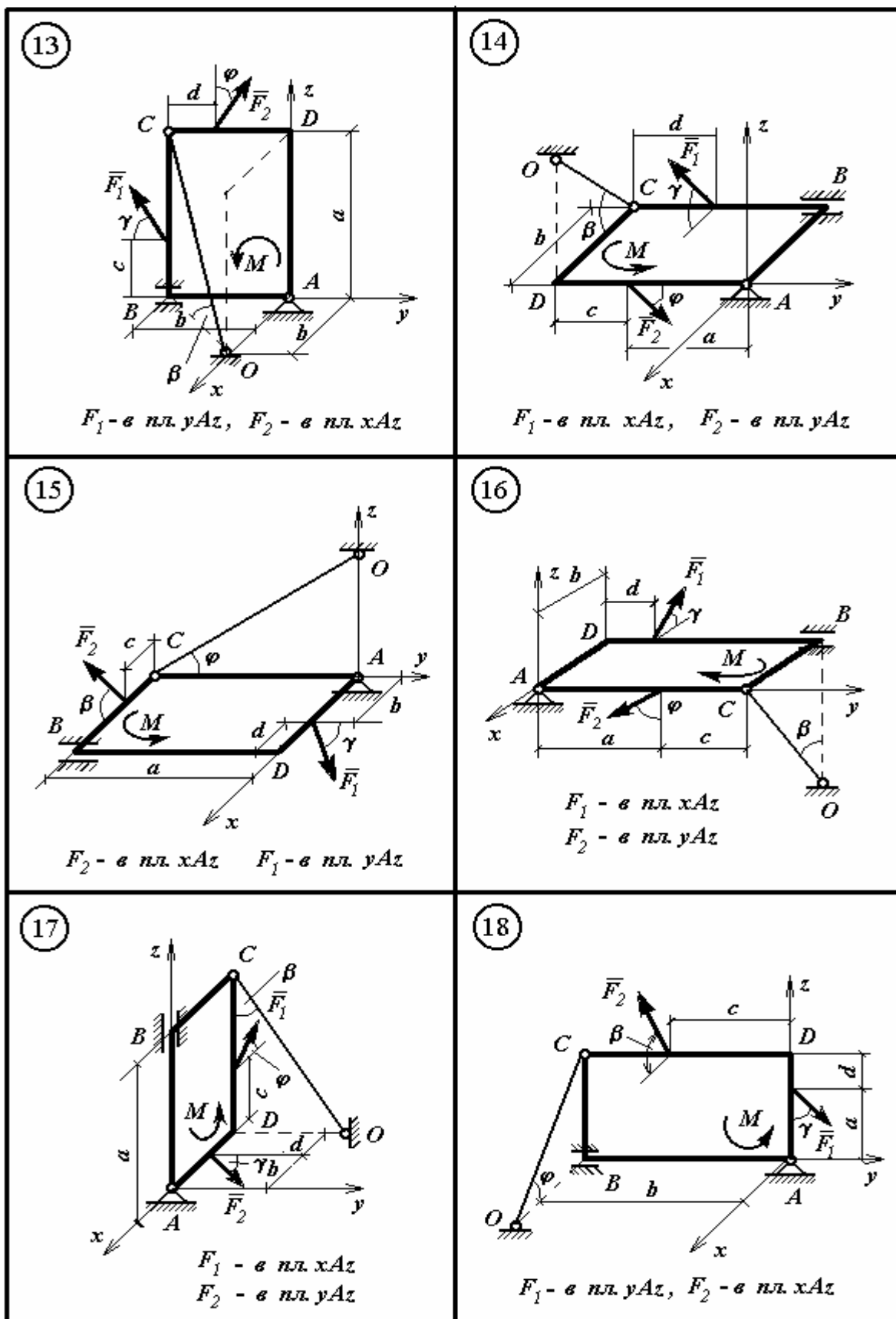


Рисунок 7.3

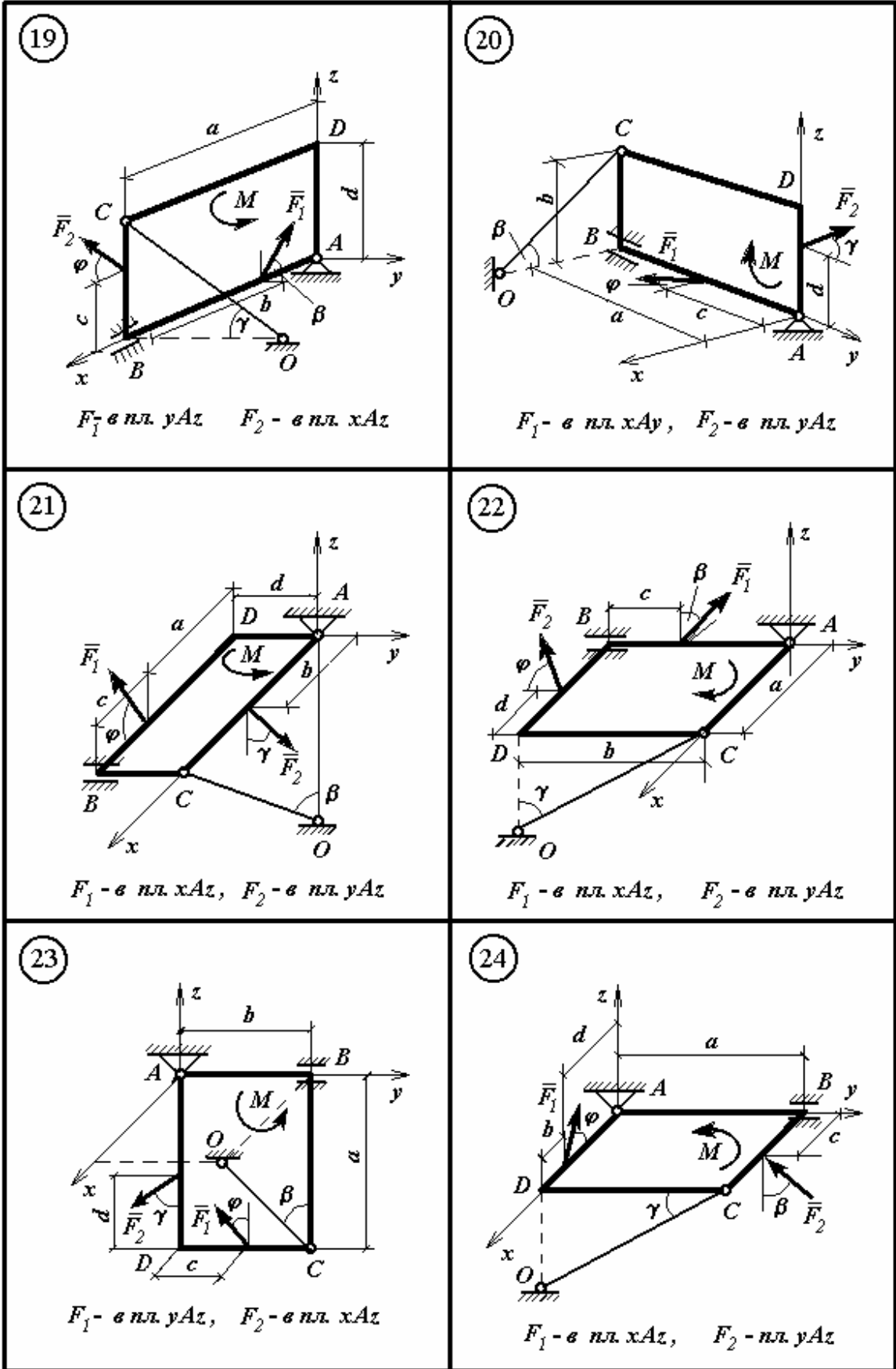


Рисунок 7.4

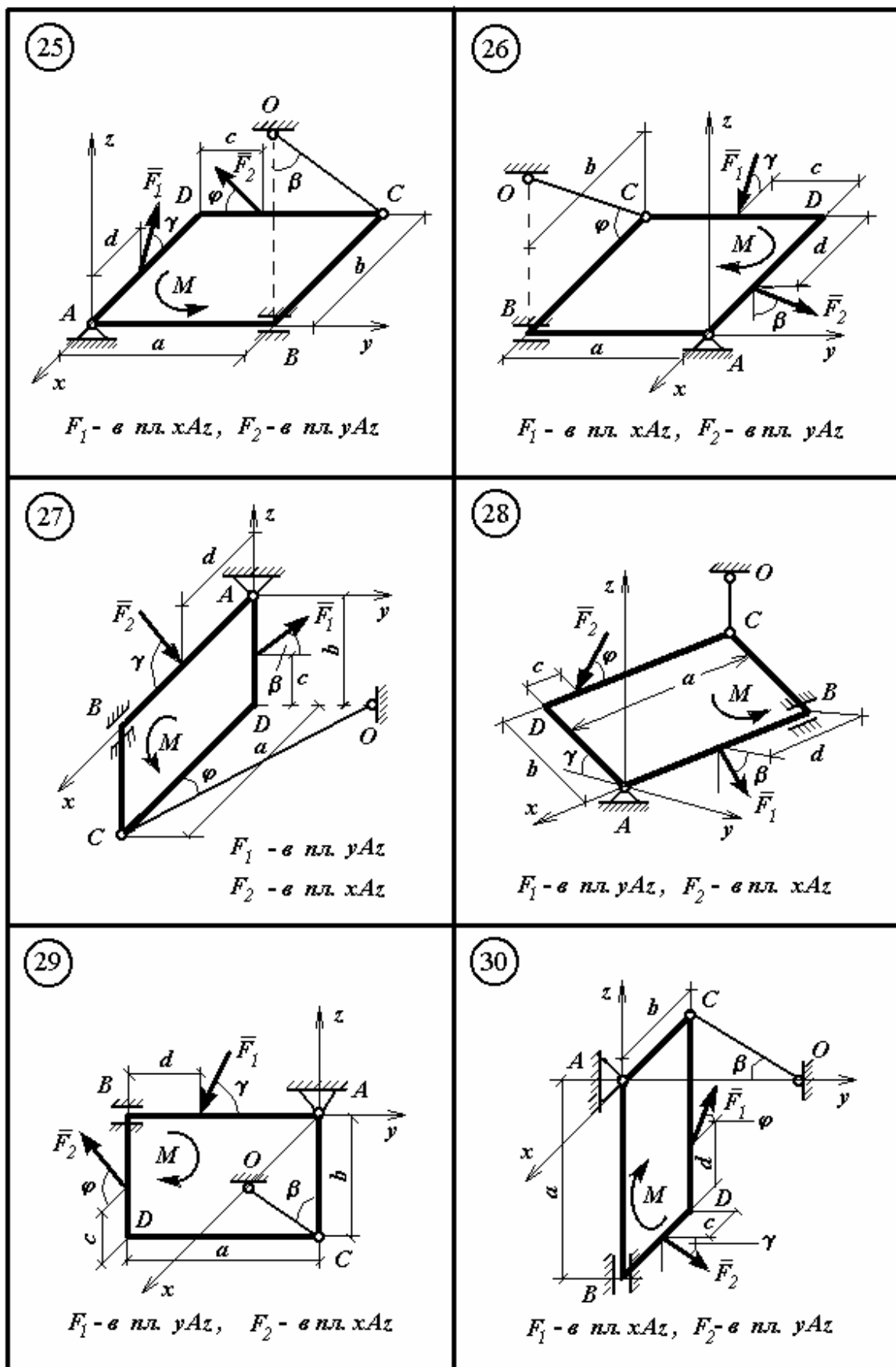


Рисунок 7.5

7.1 Приклад виконання завдання

Невагома плита $ABCD$, що зображена на рис.7.6, знаходиться в рівновазі під дією сили $F_1 = 20 \text{ Н}$ і пари сил з моментом $M = 30 \text{ Н м}$, що діє в площині плити. Сила F_1 лежить в площині паралельній до площини yAz і діє під кутом φ до осі y . Розміри плити і положення точки прикладання сили F_1 визначаються величинами: $a = 6 \text{ м}$, $b = 8 \text{ м}$ і $c = 2 \text{ м}$.

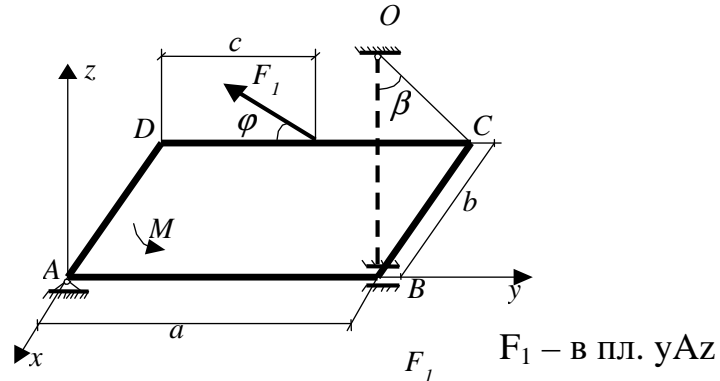


Рисунок 7.6

Плита утримується опорами: в т. А - сферичним шарніром, в т. В - циліндричним шарніром і в т. С - стержнем OC , що лежить в площині паралельній до координатної площини xAz і складає з вертикаллю кут $\beta = 60^\circ$.

Знайти реакції опор в точках А, В і С в залежності від кута φ , який змінюється від 0° до 360° . Побудувати графіки залежностей $R_A(\varphi)$, $R_B(\varphi)$, $R_C(\varphi)$.

Розв'язання. На рис 7.7 показуємо сили і реакції, що діють на плиту. В опорі А реакцію R_A розкладаємо на складові X_A , Y_A , Z_A , в опорі В реакцію R_B розкладаємо на X_B і Y_B , а в точці С реакція R_C направлена по стержню OC .

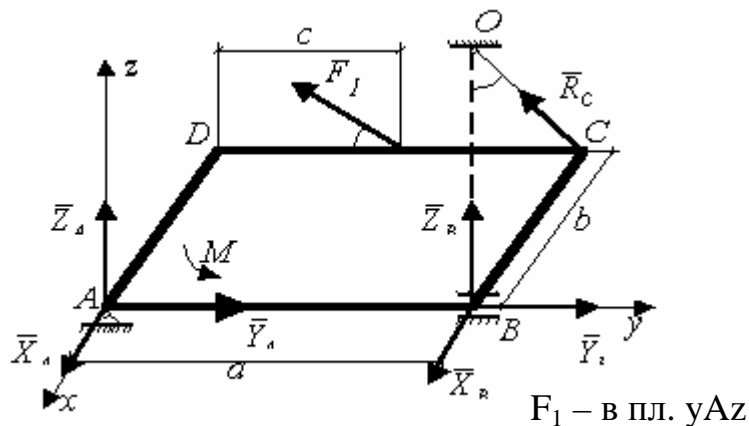


Рисунок 7.7

Рівняння рівноваги для просторової довільної системи сил:

$$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma M(F) = 0,$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma M(F) = 0,$$

$$\Sigma Z_i = 0, \quad \Sigma M(F) = 0.$$

У відповідності з рис.7.7 ці рівняння мають вигляд:

$$\Sigma X_i = X_A + X_B + R_C \sin \beta = 0, \quad (7.1)$$

$$\Sigma Y_i = Y_A - F_1 \cos \varphi = 0, \quad (7.2)$$

$$\Sigma Z_i = Z_A + Z_B + F_1 \sin \varphi + R_C \cos \beta = 0, \quad (7.3)$$

$$\Sigma M_{x_i} = F_1 \sin \varphi c + Z_B a + R_C \cos \beta a = 0, \quad (7.4)$$

$$\Sigma M_{y_i} = F_1 \sin \varphi b + R_C \cos \beta b = 0, \quad (7.5)$$

$$\Sigma M_{z_i} = M - X_B a + F_1 \cos \varphi b - R_C \sin \beta a = 0. \quad (7.6)$$

Одержані рівняння розв'язуємо в такій послідовності: (7.2),(7.5),(7.6), (7.1),(7.4),(7.3).

$$Y_A = F_1 \cos \varphi, \quad (7.7)$$

$$R_C = - (F_1 \sin \varphi b) / (b \cos \beta), \quad (7.8)$$

$$X_B = (M + F_1 \cos \varphi b - R_C \sin \beta a) / a, \quad (7.9)$$

$$X_A = - X_B - R_C \sin \beta, \quad (7.10)$$

$$Z_B = - (F_1 \sin \varphi c + R_C \cos \beta a) / a, \quad (7.11)$$

$$Z_A = - Z_B - F_1 \sin \varphi - R_C \cos \beta. \quad (7.12)$$

Модулі реакцій R_A і R_B знайдемо за формулами

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}, \quad (7.13)$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2}. \quad (7.14)$$

За формулами (7.7) - (7.14) складаємо програму на мові BASIC і виконуємо розрахунки за допомогою EOM. Приводимо програму з ім'ям "С 3" і частину результатів значень реакцій в залежності від кута ϕ .

```

10 REM " С3 "
20 PI=3.14
30 F1=20
40 M=30
50 B=PI/3
60 S1=SIN(B)
70 C1=COS(B)
80 A=6
90 B=8
100 C=2
110 FOR F=0 TO 360 STEP 30
120 S2=SIN(F*PI/180)
130 C2=COS(F*PI/180)
140 YA=F1*C2
150 RC=-(F1*S2*B)/(B*C1)
160 XB=(M+F1*C2*B-RC*S1*A)/A
170 XA=-XB-RC*S1
180 ZB=-(F1*S2*C+RC*C1*A)/A
190 ZA=-ZB-F1*S2-RC*C1
200 RA=SQR(XA^2+YA^2+2A^2)
210 RB=SQR(XB^2+ZB^2)
220 PRINT "-----"
230 PRINT "          KYT   F="F
240 PRINT "XA="XA,"YA="YA,"ZA="ZA,"RA="RA
250 PRINT "XB="XB,"ZB="ZB,"RB="RB,"RC="RC
260 NEXT F
270 END

```

		KYT	F= 0		
XA=-31.66667	YA= 20	ZA= 0	RA= 37.45368		
XB= 31.66667	ZB= 0	RB= 31.66667	RC= 0		

		KYT	F= 30		
XA=-28.09755	YA= 17.32316	ZA=-6.663602	RA= 33.67444		
XB= 45.38889	ZB= 6.-663601	RB= 45.87543	RC=-19. 97244		

		KYT	F= 60
--	--	-----	-------

$X_A = -18.34559$	$Y_A = 10.00919$	$Z_A = -11.54347$	$R_A = 23.87459$
$X_B = 48.29967$	$Z_B = 11.54347$	$R_B = 49.65994$	$R_C = -34.59859$

KYT F= 300			
$X_A = -18.27198$	$Y_A = 9.953986$	$Z_A = 11.56466$	$R_A = 23.80522$
$X_B = -11.73709$	$Z_B = -11.56466$	$R_B = 16.47728$	$R_C = 34.66212$

KYT F= 330			
$X_A = -28.05499$	$Y_A = 17.29124$	$Z_A = 6.70035$	$R_A = 33.62981$
$X_B = 10.66829$	$Z_B = -6.70035$	$R_B = 12.5979$	$R_C = 20.082P9$

KYT F= 360			
$X_A = -31.66654$	$Y_A = 19.9999$	$Z_A = 4.246789E-02$	$R_A = 37.45353$
$X_B = 31.55634$	$Z_B = -4.246789E-02$	$R_B = 31.55637$	$R_C = 0.1272867$

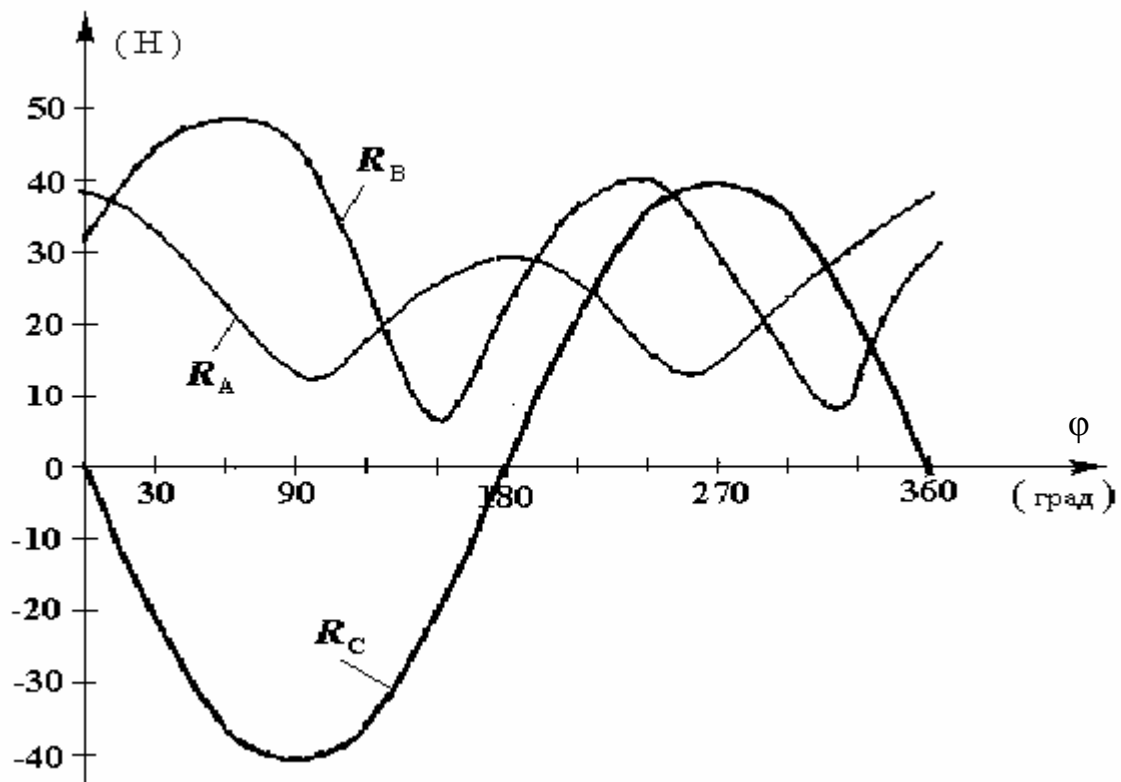


Рисунок 7.8

На рис. 7.8 зображені залежності $R_A(\varphi)$, $R_B(\varphi)$, $R_C(\varphi)$, які побудовані на основі одержаних числових розрахунків.

С.8 Визначення центра ваги плоских тіл

Плоска фігура, форма якої задається на рисунках (8.1-8.5), має геометричні розміри, які визначаються параметрами a, b, c, d, t, n, h, l (розміри в сантиметрах). В фігурі виконано отвір, що має форму частини круга з радіусом R . Дільниця контура плоскої фігури з позначкою L має форму квадратної параболи $y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$.

Для заданої плоскої фігури визначити:

- а) аналітичний вигляд контуру L ;
- б) координати центра ваги в вибраній системі координат за допомогою розрахунків за відповідними формулами;
- в) координати центра ваги за допомогою експерименту, виготовивши макет фігури з паперу;
- г) похибку в відсотках між результатами аналітичних розрахунків і експерименту.

Значення розмірів взяти за варіантом з таблиці 8.1 :

Таблиця 8.1

Варіант	A	b	c	d	h	l	t	n	R
1	6,4	3,6	2,4	2,6	2,8	1,8	3,2	2,0	1,4
2	7,0	4,8	3,0	4,2	2,6	3,0	4,1	3,6	1,0
3	7,3	5,0	3,2	3,5	3,5	3,1	3,2	4,0	1,2
4	6,9	3,6	2,5	5,0	4,3	2,6	2,8	4,6	1,3
5	7,4	4,2	2,4	2,8	2,0	2,8	3,9	2,5	0,8
6	8,2	3,7	3,0	3,6	2,9	3,2	2,8	6,3	1,4
7	6,5	4,5	2,7	3,0	2,2	2,5	3,3	4,8	1,0
8	8,0	4,8	2,5	3,4	3,0	1,9	3,6	5,9	1,5
9	7,8	3,9	2,6	2,9	2,8	2,0	3,0	4,2	1,2
0	8,5	4,5	2,8	4,0	3,2	2,7	2,9	3,5	0,9

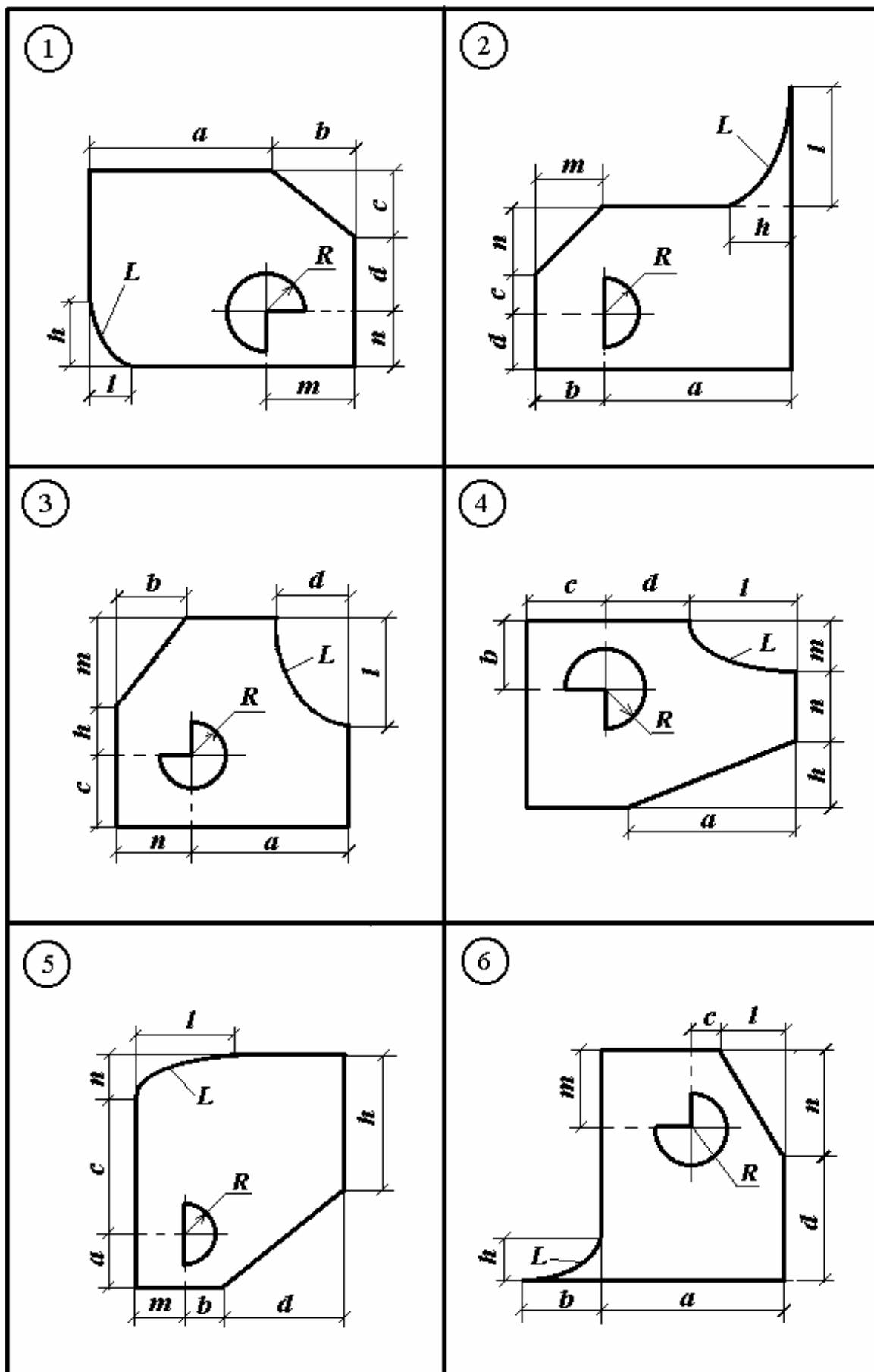


Рисунок 8.1

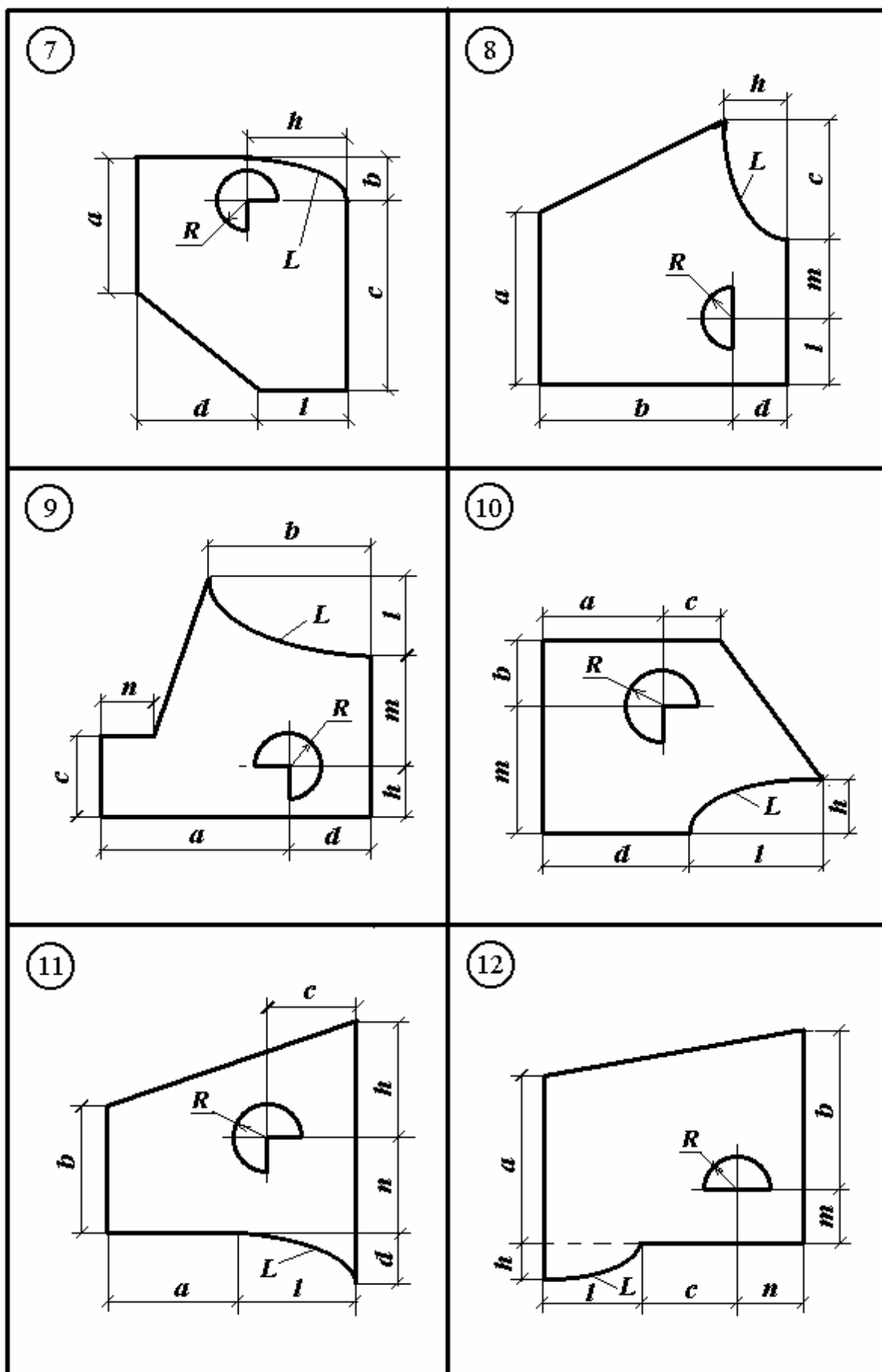


Рисунок 8.2

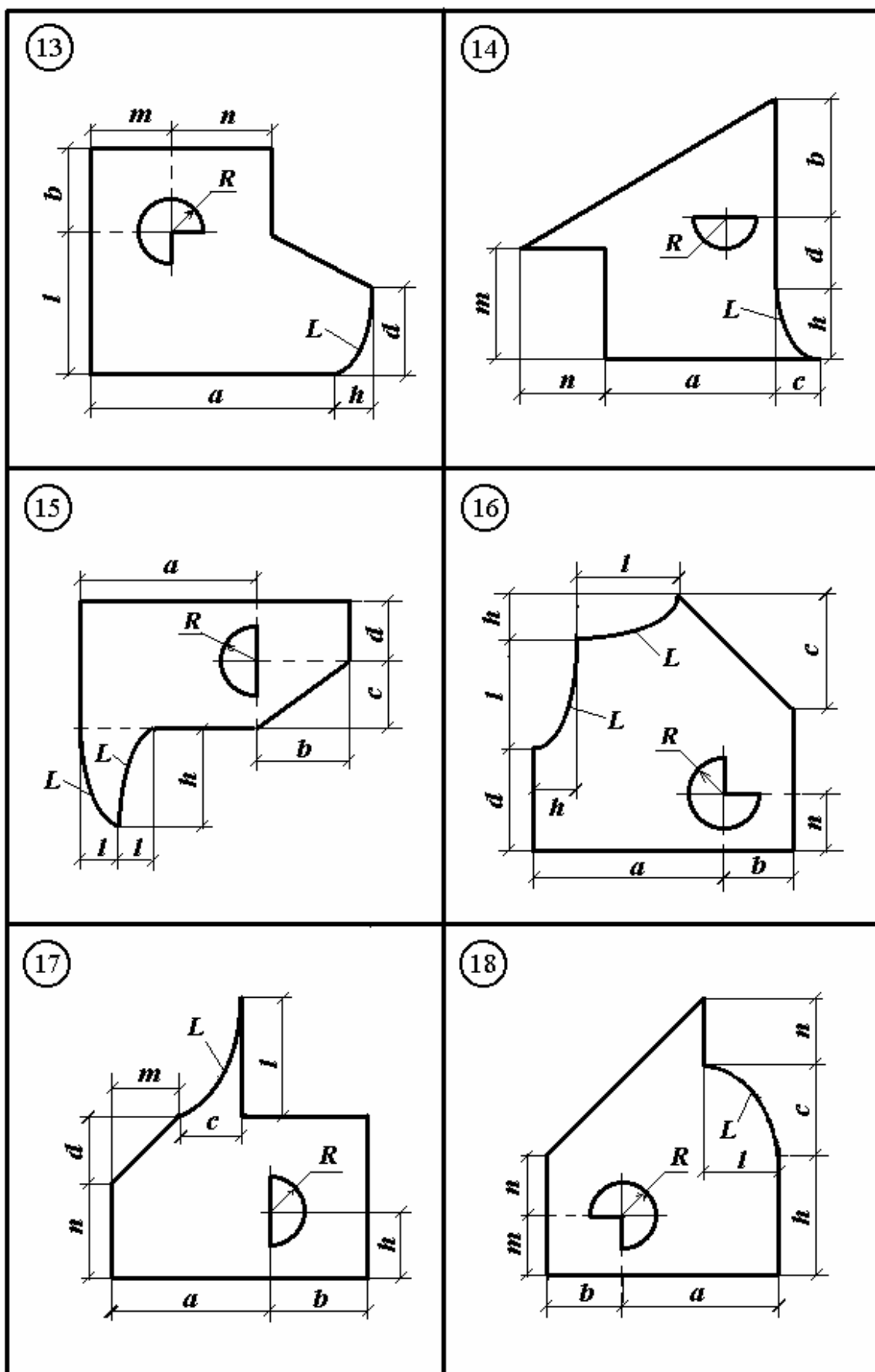


Рисунок 8.3

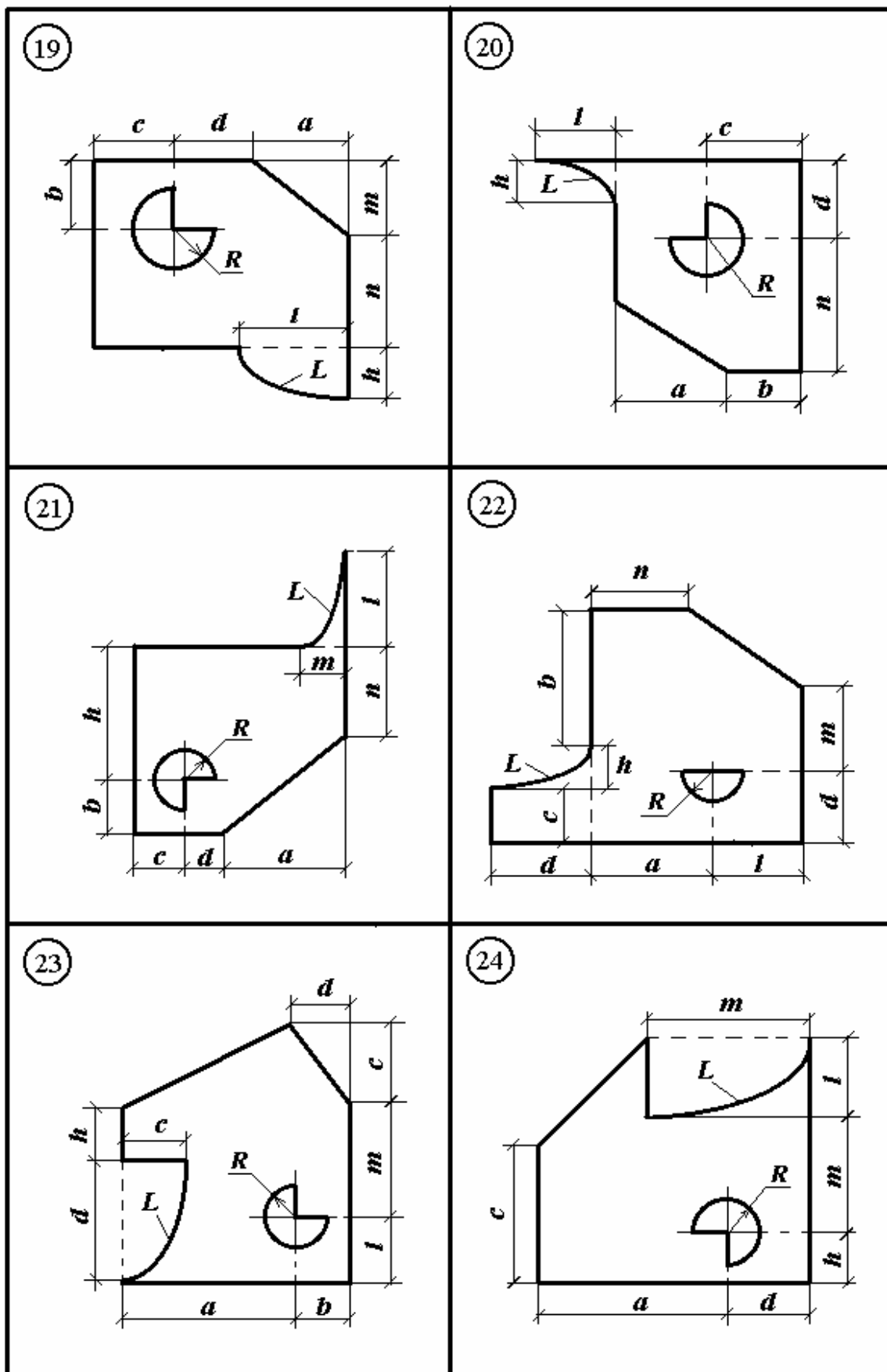


Рисунок 8.4

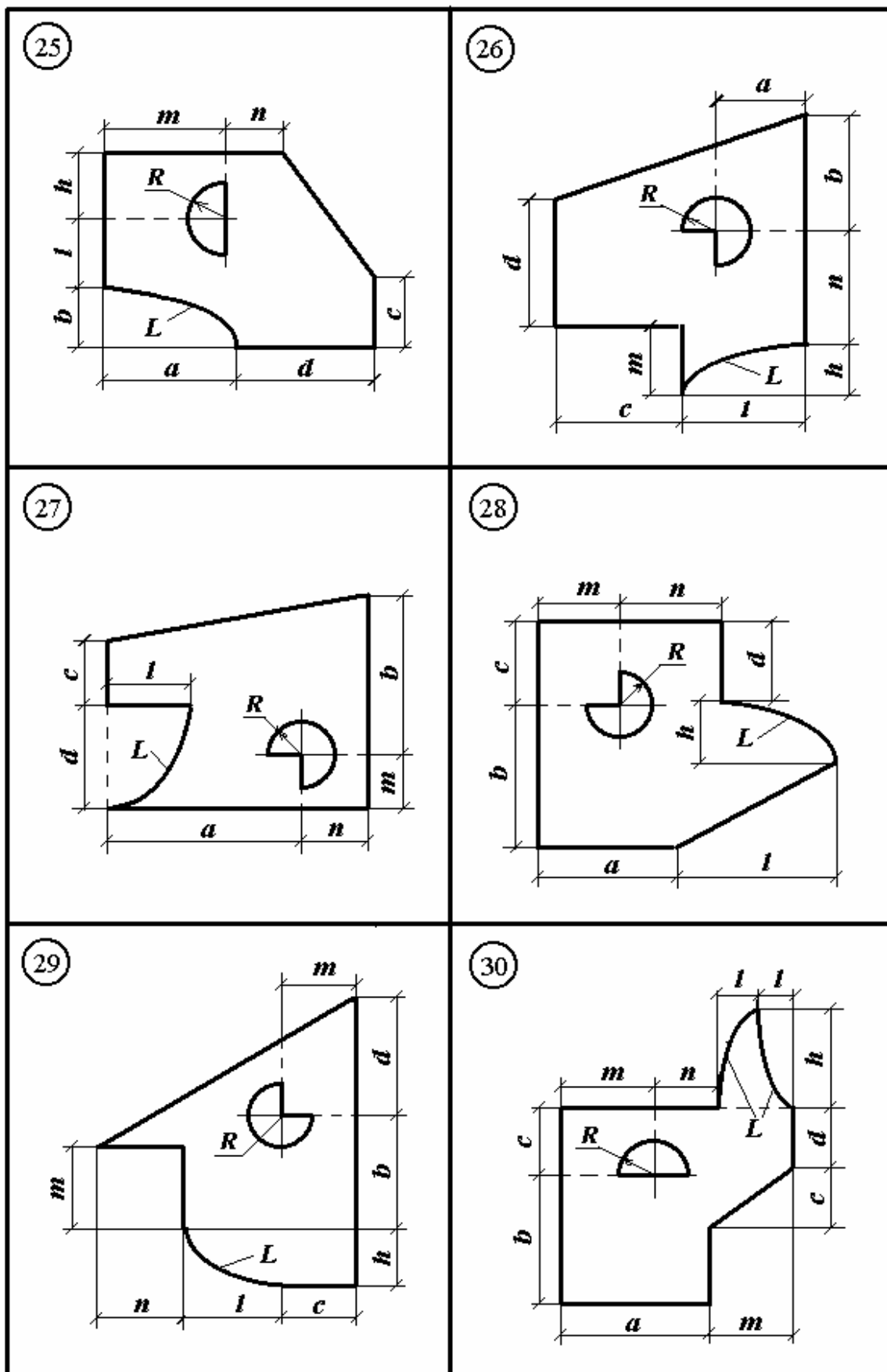


Рисунок 8.5

8.1 Приклад виконання завдання

На рис. 8.6 задана плоска фігура з розмірами в сантиметрах : $a=4$, $b=4$, $c=6$, $d=5$, $m=3$, $n=2$, 5 , $h=3$, 6 , $l=2$, 4 , з якої вирізано отвір у вигляді півкруга радіусом $R=1$, а видалений контур L має форму квадратичної параболи $y=A_1x^2+A_2x+A_3$ з вершиною в точці K .

Визначити положення центра ваги заданої фігури згідно з пунктами 1 - 4, що містяться в умові завдання.

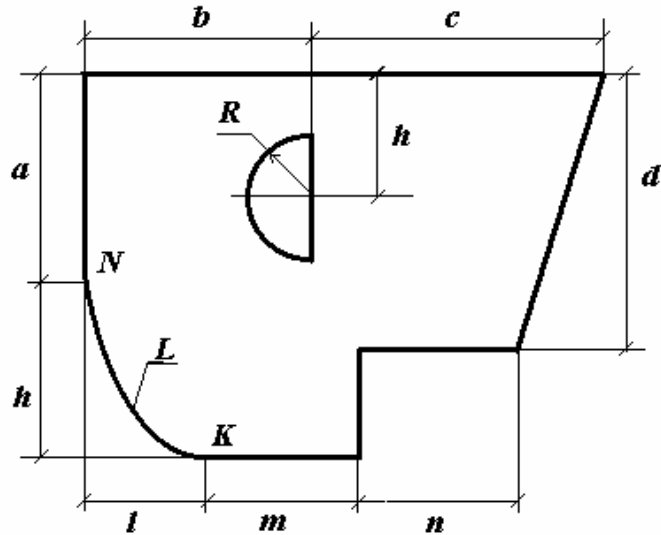


Рисунок 8.6

Розв'язання: Розташовуємо задану фігуру в системі координат xOy , як показано на рис. 8.7 Виділяємо в фігурі прості елементи і на кожному з них ставимо його номер : 1 - параболічний контур , 2 і 3 - прямокутники , 4 - трикутник , 5 - півкруг.

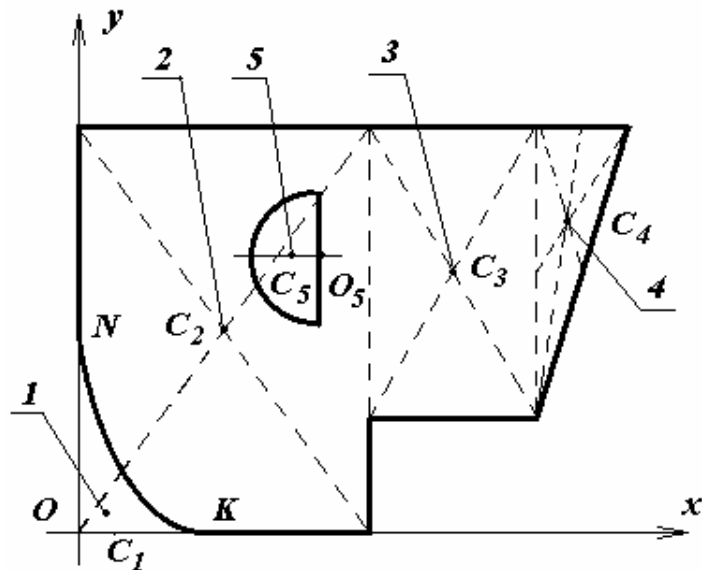


Рисунок 8.7

Визначаємо аналітичний вигляд параболи контуру L , який покажемо на рис. 8.8.

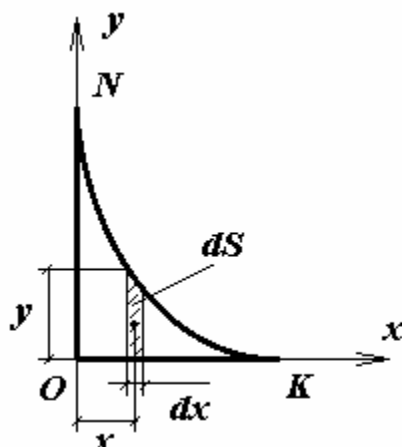


Рисунок 8.8

Положення крайніх точок параболи визначається розмірами :

$$OK = l, \quad ON = h .$$

Знайдемо коефіцієнти A_1 , A_2 і A_3 для параболи загального вигляду

$$y = A_1 x^2 + A_2 x + A_3. \quad (8.1)$$

Для параболи (8.1) виконуються умови :

- 1) $y = h$ при $x = 0$,
- 2) $y = 0$ при $x = l$,
- 3) $dx/dy = 0$ при $x = l$.

Звідки отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} h &= A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0 + A_3, \\ 0 &= A_1 l^2 + A_2 l + A_3, \\ 0 &= 2 A_1 l + A_2. \end{aligned}$$

Яка дає розв'язки : $A_1 = h/l^2$, $A_2 = -2h/l$, $A_3 = h$.
Тоді контур L має такий аналітичний вигляд

$$y = h x^2/l^2 - 2 h x/l + h = h (x/l - 1)^2. \quad (8.2)$$

Знайдемо площу і координати центра ваги фігури, що обмежена координатними осями і контуром L . Площа фігури визначиться інтегралом

$$S_1 = \int_0^l y dx = h \int_0^l (x/l - 1)^2 dx = hl/3 . \quad (8.3)$$

Центр ваги фігури знаходиться в точці C_1 з координатами x_1 і y_1 , які визначаються формулами :

$$x_1 = I_x / S_1, \quad y_1 = I_y / S_1, \quad (8.4)$$

де інтеграли I_x і I_y рівні :

$$I_x = \int_0^l x dS = \int_0^l x \cdot y \cdot dx = \int_0^l x \cdot h (x/l - 1)^2 dx = hl^2 / 12 ,$$

$$I_y = \int_0^l 0,5 y^2 dS = 0,5 \int_0^l y^2 dx = 0,5 h^2 \int_0^l (x/l - 1)^4 dx = h^2 \cdot l / 10.$$

Тоді $x_1 = I_x / S_1 = l/4 , \quad y_1 = I_y / S_1 = 0,3 h . \quad (8.5)$

Визначаємо площі і координати центра ваги прямокутників під номерами 2 і 3

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= (l + m) \cdot (a + h) , \\ x_2 &= (l + m) / 2 , \\ y_2 &= (a + h) / 2 . \end{aligned} \right| \quad (8.6)$$

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= n \cdot d , \\ x_3 &= l + m + n / 2 , \\ y_3 &= a + h - d / 2 . \end{aligned} \right| \quad (8.7)$$

Визначаємо площу і координати центра ваги трикутника 4

$$\left. \begin{aligned} S_4 &= 0,5 \cdot d \cdot (b + c - l - m - n) , \\ x_4 &= l + m + n + (b + c - l - m - n) / 3 , \\ y_4 &= a + h - d / 3 . \end{aligned} \right| \quad (8.8)$$

Визначаємо площу і координати центра ваги півкруга 5

$$\left. \begin{aligned} S_5 &= 0,5 \cdot \pi R^2 , \\ x_5 &= b - O_5 C_5 . \end{aligned} \right| \quad (8.9)$$

Величину відрізка $O_5 C_5$, див. рис. 8.7, знаходимо як центр ваги півкруга, що є сектором з центральним кутом рівним π

$$\left. \begin{aligned} O_5 C_5 &= 4R / (3\pi) , \\ y_5 &= a + h - h = a . \end{aligned} \right| \quad (8.10)$$

Координати центра ваги заданої фігури знайдемо за формулами :

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i}, \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i}, \quad (8.11)$$

– де вилучені площі S_1 і S_5 ставимо з від'ємним знаком.

В формули (8.2), (8.3), (8.5)–(8.11) підставляємо дані задачі і знаходимо координати центра ваги пластини.

Площа S_1 і координати центра X_1, Y_1 фігури 1

$$Y = 0,625x^2 - 3x + 3,6,$$

$$S_1 = \int_0^b y \cdot dx = \int_0^{2,4} (0,625x^2 - 3x + 3,6) dx = 2,88 \text{ см}^2,$$

$$I_x = \int_0^l x \cdot dS = \int_0^l x \cdot y \cdot dS = \int_0^{2,4} x \cdot (0,625x^2 - 3x + 3,6) dx = 1,728 \text{ см}^3,$$

$$I_y = \int_0^l 0,5 \cdot y \cdot dS = 0,5 \int_0^l y^2 \cdot dS = 0,5 \int_0^{2,4} x \cdot (0,625x^2 - 3x + 3,6) dx = 3,1104 \text{ см}^3,$$

$$X_1 = \frac{I_x}{S_1} = \frac{1,728}{2,88} = 0,6 \text{ см},$$

$$Y_1 = \frac{I_y}{S_1} = \frac{3,1104}{2,88} = 1,08 \text{ см}.$$

Площі і координати центра ваги прямокутників під номерами 2 і 3

$$S_2 = (1+m) \cdot (a+h) = (2,4+3) \cdot (4+3,6) = 41,04 \text{ см}^2,$$

$$x_2 = (1+m) / 2 = (2,4+3) / 2 = 2,7 \text{ см},$$

$$y_2 = (a+h) / 2 = (4+3,6) / 2 = 3,8 \text{ см},$$

$$S_3 = n \cdot d = 2,5 \cdot 5 = 12,5 \text{ см}^2,$$

$$x_3 = 1+m+n/2 = 2,4+3+2,5/2 = 6,65 \text{ см},$$

$$y_3 = a+h-d/2 = 4+3,6-5/2 = 5,1 \text{ см}.$$

Площу і координати центра ваги трикутника 4

$$S_4 = 0,5 \cdot d \cdot (b+c-l-m-n) = 0,5 \cdot 5 \cdot (4+6-2,4-3-2,5) = 5,25 \text{ см}^2,$$

$$x_4 = 1+m+n+(b+c-l-m-n)/3 = 2,4+3+2,5+(4+6-2,4-3-2,5)/3 = 8,6 \text{ см},$$

$$y_4 = a+h-d/3 = 4+3,6-5/3 = 5,93 \text{ см}.$$

Площу і координати центра ваги півкруга 5

$$S_5 = 0,5 \cdot \pi R^2 = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 1 = 1,57 \text{ см}^2,$$

$$x_5 = b - O_5 C_5.$$

$$O_5 C_5 = 4R / (3\pi) = 4 \cdot 1 / (3 \cdot 3,14) = 0,42 \text{ см},$$

$$x_5 = b - O_5 C_5 = 4 - 0,42 = 3,58 \text{ см},$$

$$y_5 = a + h - h = a = 4 \text{ см}.$$

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i}, \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i},$$

$$x_c = (-2,88 \cdot 0,6 + 41,04 \cdot 2,7 + 12,5 \cdot 6,65 + 5,25 \cdot 8,6 - 1,57 \cdot 3,58) / (-2,88 + 41,04 + 12,5 + 5,25 - 1,57) = 231,73 / 54,34 = 4,26 \text{ см},$$

$$y_c = (-2,88 \cdot 1,08 + 41,04 \cdot 3,8 + 12,5 \cdot 5,1 + 5,25 \cdot 5,93 - 1,57 \cdot 4) / 54,34 = 241,4441 / 54,34 = 4,44 \text{ см}.$$

Для обчислень контуру L і координат центра ваги заданої фігури за формулами (8.2), (8.3), (8.5) -(8.11) можна використати ПЕОМ. Для цього необхідно скласти програму. Приводимо приклад програми під назвою "CENTR" на мові "BASIC" і результати розрахунків.

```

10 REM " CENTR "
20 PI=3.14
30 A=4
40 B=4
50 C=6
60 D=5
70 M=3
80 N=2.5
90 H=3.6
100 LPRINT " CONTUR "
110 L=2.4
120 FOR X=0 TO L STEP .3
130 Y=H*(X/L-1)^2
140 LPRINT "X="X, "Y="Y
150 NEXT X
160 S1=H*L/3
170 S2=(L+M)*(A+:
180 S3=N*D
190 S4=D*(B+C-L-M-N)/2
200 S5=PI*R^2/2
210 X1=L/4
220 X2=(L+M)/2
230 X3=L+M+N/2
240 X4=L+M+N+(B+C-L-M-N)/3
250 OG=4*R/(3*PI)
260 X5=B-OC
270 Y1=. 3*H
280 Y2=(A+H)/2

```

```

290 Y3=A+H-D/2
300 Y4=A+H-D/3
310 Y5=A
320 SX=-S1*X1+S2*X2+S3*X3+S4*X4-S5*X5
330 SY=-S1*Y1+S2*Y2+S3*Y3+S4*Y4-S5*Y5
340 S=-S1+S2+S3+S4-S5
350 XC=SX/S
360 YC=SY/S
370 LPRINT "-----"
380 LPRINT "XC="XC, "YC="YC
390 LPRINT "-----"
400 END

```

CONTUR

X=0	Y= 3.6
X= .3	Y= 2.75625
X= .6	Y= 2.025
X= .9000001	Y= 1.40625
X= 1.2	Y= .9
X= 1.5	Y=.50625
X= 1.8	Y=.250001
X= 2.1	Y=5.625005E-02
X= 2.4	Y=5.115908E-14

XC= 4.245305 YC= 4.431079

Виготовимо з цупкого паперу фігуру за формою і розмірами приведених на рис. 8.6. Контур L будемо за результатами роздруку програми "CENTR", або за формулою (8.2) при $0 \leq x \leq l$. Проведемо експеримент, де центр ваги знайдемо методом подвійного підвішування. Результати такого експерименту дають:

$$x_{ce} = 4,2 \text{ см}, \quad y_{ce} = 4,4 \text{ см}.$$

Вирахуємо відносну похибку між результатами знайденими аналітично і експериментально

$$\Delta(x_c) = 100\% |x_c - x_{ce}| / (x_c + x_{ce}) / 2 = 1,42\%,$$

$$\Delta(y_c) = 100\% |y_c - y_{ce}| / (y_c + y_{ce}) / 2 = 0,9\%.$$

Фігура з цупкого паперу здається разом з роботою.

Література

1. Конспект лекцій з курсу теоретичної механіки. Статика / Уклад. В.О.Федотов, В.І. Степанчук. – Вінниця: ВПІ, 1991.-84с. Укр. мовою/.
2. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи з розрахунку плоскої ферми за допомогою ЕОМ / Уклад. В.О. Приятельчук . – Вінниця: ВПІ, 1991.-32с. Укр. мовою/.
3. Методичні вказівки до розрахунку збірної конструкції для студентів бакалаврату спеціальностей Б-57, Б-33, Б-34 треступеневої підготовки спеціалістів з вищою інженерною освітою /Уклад. В.О. Приятельчук, В.І.Риндюк. – Вінниця: ВДТУ, 1994.-32с. Укр. мовою/.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов /А.А. Яблонський, С.С. Норейко, С.А.Вольфсон, и др./ Под ред. А.А. Яблонського. –4-е изд. перераб. и доп. М.: ВШ, 1985.-367с.
5. Технічна механіка. кн.1. Теоретична механіка: Підручник/ Д.В.Чернілевський, Я.Т. Кіницький, В.М.Колосов та ін. За ред. Д.В.Чернілевського. – К.: НМК ВО, 1992. -384с.
6. Яблонський А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч.1. Статика. Кинематика. Учебник. Изд. 4-е перераб. М.: ВШ, 1971.-424с.

Навчальне видання

Приятельчук В.О., Риндюк В.І., Федотов В.О.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА
РОЗРАХУНКОВО–ГРАФІЧНІ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлений В.О. Приятельчуком.

Редактор О.Д. Скалоцька

Навчально-методичний відділ ВДТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ

Підписано до друку
Формат 29.7x42 ¼
Друк різнографічний
Зам №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. др. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95