

**В.А. Огородніков, І.О. Сивак, М.В. Бабак**

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ  
З ЕЛЕМЕНТАМИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ  
Частина 1**

УДК 620.1(075)  
О 39

**Р е ц е н з е н т и:**

**П.С. Берник**, доктор технічних наук, професор  
**О.М. Переяславський**, кандидат технічних наук, доцент  
**А.С. Моргун**, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

**В.А. Огородніков, І.О. Сивак, М.В. Бабак**

**О 39 Опір матеріалів з елементами теорії пластичності.** Під загальною редакцією В.А. Огороднікова.

Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 100 с.

Навчальний посібник стане в нагоді студентам всіх спеціальностей, а також буде корисним викладачам та фахівцям.

УДК 620.1(075)

© В.А. Огородніков, І.О. Сивак, М.В. Бабак, 2001

# З М І С Т

<b>Передмова</b> . . . . .	5
<b>1. Основні положення</b> . . . . .	6
1.1 Предмет і задачі курсу. . . . .	6
1.2 Реальний об'єкт і розрахункова схема. . . . .	8
1.3 Основні гіпотези і припущення. . . . .	8
1.4 Види навантажень і основних деформацій. . . . .	9
1.5 Внутрішні сили. Метод перерізів. . . . .	11
1.6 Напруження в перерізі. . . . .	12
<b>2. Розтягання і стискання</b> . . . . .	14
2.1 Напруження і деформації. . . . .	14
2.2 Закон Гука для розтягання і стискання. . . . .	16
2.3 Діаграма розтягання. Механічні характеристики матеріалу.	17
2.4 Допустиме напруження. . . . .	20
2.5 Розрахунки на міцність за допустимими напруженнями. . . . .	21
2.6 Статично невизначуванні задачі. . . . .	22
2.7 Розрахунок температурних напружень в СНС . . . . .	26
<b>3. Напружений стан в точці</b> . . . . .	29
3.1 Поняття про напружений стан. . . . .	29
3.2 Плоский напружений стан. . . . .	30
3.3 Головні площадки і головні напруження . . . . .	31
3.4 Узагальнений закон Гука. . . . .	33
3.5 Потенціальна енергія деформації . . . . .	33
<b>4. Теорії міцності</b> . . . . .	35
4.1 Оцінка міцності при складному напруженому стані. . . . .	35
4.2 Основні гіпотези міцності. . . . .	36
4.3 Критерії руйнування . . . . .	38
<b>5. Зсув</b> . . . . .	41
5.1 Основні поняття. Напруження при зсуві. . . . .	41
5.2 Напруження і деформації при чистому зсуві. . . . .	41
5.3 Практичні розрахунки на зріз і зминання. . . . .	43

<b>6. Геометричні характеристики плоских перерізів. . . . .</b>	<b>45</b>
6.1 Статичний момент площі. Центр ваги перерізу. . . . .	45
6.2 Моменти інерції перерізу. . . . .	46
6.3 Формули переходу до паралельних або повернутих осей. . . . .	47
6.4 Головні осі інерції та головні моменти інерції перерізу. . . . .	49
6.5. Радіуси інерції. Моменти опору. . . . .	50
<b>7. Кручення. . . . .</b>	<b>52</b>
7.1. Напруження і деформації при крученні стержнів круглого поперечного перерізу. . . . .	52
7.2. Епюри крутних моментів. . . . .	55
7.3. Розрахунки на міцність і жорсткість. . . . .	55
7.4. Напруження і деформації в стержнях прямокутного поперечного перерізу. . . . .	57
7.5. Статично невизначуванні задачі при крученні. . . . .	59
<b>8. Згин. . . . .</b>	<b>62</b>
8.1. Основні поняття. . . . .	62
8.2. Поперечна сила і згинальний момент. . . . .	62
8.3. Залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження, поперечною силою і згинальним моментом. . . . .	64
8.4. Епюри поперечних сил і згинальних моментів. . . . .	65
8.5. Нормальні напруження при чистому згині. . . . .	68
8.6. Поперечний згин. Дотичні напруження. . . . .	72
8.7. Аналіз напруженого стану при згині. Розрахунки на міцність	73
8.8 Рівняння пружної лінії зігнутої балки. . . . .	78
8.9. Визначення кутових та лінійних переміщень методом початкових папраметрів. . . . .	80
<b>Додаток А . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>Література . . . . .</b>	<b>99</b>

## ПЕРЕДМОВА

Останнім часом в зв'язку зі скороченням аудиторного часу, який відводиться на вивчення курсу опору матеріалів в вищих навчальних закладах, і в той же час появою нових розділів в науках про міцність – повзучість, експериментальна механіка машин, пластичність, теорія надійності та інше, виникла потреба в створенні короткого підручника, який буде відображати сучасні тенденції розвитку наук про міцність. Більшість відомих нам підручників розраховані на суттєво більший об'єм годин, ніж це передбачено сучасними програмами. Тому в запропонованому підручнику зроблена спроба привести у відповідність фактичний об'єм відведених годин, які відводяться на вивчення курсу опору матеріалів, із конспективним його викладенням.

Крім того, на відміну від підручників, які вже існують, де деякі розділи наук про міцність відображені слабо, в запропонованому підручнику викладено новий науковий напрямок, який розвивається на кафедрі опору матеріалів та прикладної механіки ВДТУ з 1971 року – теорія граничних станів в умовах складного напруженого стану і складного навантаження, теорія деформовності тіл зі складною реологією. Цей матеріал представляє великий науковий та практичний інтерес як для спеціалістів, які досліджують матеріал за границею пружності, так і для технологів з обробки металів тиском.

Підручник складається із трьох частин:

*I* – охоплює розділи “Основні положення”, “Розтягання і стискання”, “Напружений стан в точці”, “Теорія міцності”, “Зсув”, “Геометричні характеристики плоских перерізів”, “Кручення” і “Згин”;

*II* – традиційні розділи і розділи в яких висвітлені методи розрахунків за межами пружності;

*III* – експериментальна механіка машин.

Деякі спеціальні розділи підручника призначені для студентів усіх спеціальностей, а також корисні для магістрів, аспірантів та викладачів вищих навчальних закладів.

# 1 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

## 1.1 Предмет і задачі курсу

Опір матеріалів як наука виник в епоху Відродження, коли розвиток техніки, торгівлі, мореплавства, військової справи вимагав наукових обґрунтувань, потрібних для будівництва великих морських суден, мостів, гідротехнічних споруд та інших складних конструкцій. Засновником цієї науки вважають італійського вченого Галілея (1564–1642). Значний вклад в розвиток науки про опір матеріалів вніс англійський вчений Роберт Гук (1635–1703), який відкрив закон пружної деформації. Подальший розвиток цієї науки був викликаний прогресом промисловості і пов'язаний з працями видатних учених та інженерів: Леонарда Ейлера (1707–1783), М.В. Ломоносова (1711–1765), І.П. Кулібіна (1735–1818), Д.І. Журавського (1821–1891), Ф.С. Ясинського (1856–1899), Н.А. Боголюбського (1845–1922), О.М. Крилова (1863–1945) та інших. Значний вклад в розвиток опору матеріалів як науки внесли також Лагранж, Максвелл, Кастільяно, Мор.

Наука про опір матеріалів продовжує розвиватися, уточнюються і вдосконалюються методи розрахунку. Більшість законів і висновків мають чітке математичне відбиття. Опір матеріалів як класична наука має менш абстрактний характер у порівнянні з теоретичною механікою, що досліджує закони руху абсолютно твердих тіл. Опір матеріалів вивчає поведінку реальних твердих тіл, розміри яких можуть змінюватися у процесі дії сил.

Досвід показує, що всі частини конструкцій під дією навантажень деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри, а іноді руйнуються.

Опір матеріалів – це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин та споруд.

Міцністю називається здатність матеріалу конструкцій і їх елементів чинити опір дії зовнішніх сил не руйнуючись. В опорі матеріалів розглядають методи розрахунку елементів конструкцій на міцність.

Під жорсткістю розуміють здатність конструкцій, їх елементів протидіяти деформації (зміні розмірів і форми). Розрахунки на жорсткість гарантують, що зміни форми і розміру конструкцій і їх елементів не перевищать допустимих норм.

Під стійкістю розуміють здатність конструкції і її елементів протидіяти зусиллям, які намагаються вивести її з початкового стану рівноваги. Розрахунки на стійкість дають можливість уникнути раптової втрати стійкості і викривлення довгих або тонких деталей.

Щоб конструкція в цілому відповідала вимогам міцності, жорсткості і стійкості, необхідно придати її елементам раціональну форму і необхідні розміри – всі ці питання розглядаються в курсі "Опір матеріалів".

Наука про опір матеріалів ґрунтується на законах теоретичної механіки, в якій тіла вважаються абсолютно жорсткими, тобто не здатними до деформації. Користуючись розглянутим в теоретичній механіці принципом твердження, в опорі матеріалів для визначення реакцій опор і діючих у перерізах деталей внутрішніх сил застосовуватимемо до деформованих тіл умови рівноваги статички. Проте для розрахунків на міцність та жорсткість деякі положення теоретичної механіки виявляються непридатними, зокрема:

1) зовнішні сили, які діють на тіло, не можна замінити їх рівнодієюю або еквівалентною системою сил;

2) силу не можна переносити вздовж лінії її дії;

3) пару сил не можна пересувати в площині дії пари.

Ці правила мають виняток. Так, наприклад, сили, прикладені до невеликої поверхні тіла як і в теоретичній механіці, вважатимемо зосередженими, тобто прикладеними до однієї точки; розподілені реактивні сили, прикладені до затисненого кінця балки, як і раніше, замінюватимемо реактивною силою і реактивним моментом. Такі заміни не вносять суттєвих змін в умови деформування. Це положення має назву принципу пом'якшених граничних умов або принципу Сен-Венана, за ім'ям французького вченого Сен-Венана (1797–1886).

Принцип Сен-Венана можна сформулювати так: у точках тіла, достатньо віддалених від місць прикладення зовнішніх сил, величина внутрішніх сил дуже мало залежить від конкретного способу прикладення сил. Надалі, вивчаючи окремі види деформацій, на підставі принципу Сен-Венана не будемо цікавитися конкретними способами прикладення зовнішніх сил і вважатимемо, що в місці їх прикладення внутрішні сили змінюються стрибкоподібно.

В поєднанні з аналітичними методами, розвинутими в математиці, в курсі опору матеріалів використовуються експериментальні методи, досягнення фізики і матеріалознавства.

На практиці доводиться мати справу з конструкціями складної форми, але їх можна уявити складеними з окремих простих елементів, наприклад, брусів, пластин, оболонок і масивів. Основним розрахунковим елементом в опорі матеріалів є брус, тобто тіло, поперечні розміри якого малі порівняно з

довжиною. Бруси бувають прямолінійні і криволінійні, сталого і змінного перерізу. Залежно від їх призначення в конструкції бруси називають колонами, балками, стержнями.

Плоский переріз, перпендикулярний до осі бруса, називають поперечним; переріз, паралельний осі бруса (прямолінійного) – поздовжнім; інші плоскі перерізи – похилими. Крім розрахунку брусів курс “Опір матеріалів” займається розрахунком пластин і оболонки, тобто тіл, які мають малу товщину порівняно з іншими розмірами (наприклад, резервуари, труби, обшивки кораблів та літаків). Тіла в яких всі три розміри однакового порядку, називають масивами (наприклад, фундаменти, станини верстатів).

## **1.2 Реальний об’єкт і розрахункова схема**

Перед тим як починати розрахунки необхідно вяснити, що в даному випадку є головним, а що другорядним, тобто тим, що мало впливає на роботу системи в цілому. Другорядні фактори при розрахунках системи не враховуються.

Реальний об’єкт, звільнений від факторів, що мало впливають, називається розрахунковою схемою.

Для одного і того ж об’єкта може бути запропоновано декілька розрахункових схем в залежності від необхідної точності розрахунків і від того, яка сторона явища цікавить дослідника. Разом з тим одній і тій же розрахунковій схемі може відповідати багато різних реальних об’єктів, що дуже важливо, оскільки досліджуючи одну розрахункову схему, можна одержати рішення певного класу задач.

Вибір розрахункової схеми в опорі матеріалів починається із схематизації властивостей матеріалу, які називають гіпотезами.

## **1.3 Основні гіпотези і припущення**

Розглянемо основні гіпотези і припущення стосовно фізико-механічних властивостей матеріалів.

1. Гіпотеза про відсутність початкових внутрішніх зусиль.

Згідно з цією гіпотезою, припускають, що коли немає причин для деформації тіла (навантаження, зміна температури), то в усіх його точках внутрішні зусилля дорівнюють нулю. Тобто, сили взаємодії між частинками ненавантаженого тіла до уваги не беруть.

2. Гіпотеза про однорідність матеріалу. Фізико-механічні властивості тіла в різних точках можуть бути неоднаковими. В опорі матеріалів ці відмінності не враховують, припускаючи, що матеріал в усіх точках тіла має однакові властивості.

3. Гіпотеза про неперервність матеріалу. Згідно з цією гіпотезою, матеріал будь-якого тіла має неперервну будову і є суцільним середовищем. Припущення про неперервну будову дає змогу використовувати при розрахунках методи вищої математики.

4. Гіпотеза про ізотропність матеріалу. Ця гіпотеза передбачає, що матеріал тіла має однакові властивості в усіх напрямках. Багато матеріалів складається з кристалів, в яких фізико-механічні властивості в різних напрямках істотно відрізняються. Проте, завдяки наявності в тілі великої кількості безладно розмішених кристалів, властивості всього тіла в різних напрямках вирівнюються.

Припущення про ізотропність добре підтверджується практикою для більшості матеріалів і лише наближено для таких матеріалів, як камінь, пластмаси, залізобетон. Матеріали, які мають неоднакові властивості в різних напрямках, називають анізотропними.

5. Гіпотеза про ідеальну пружність. Ця гіпотеза передбачає, що в певних межах навантаження матеріал виявляє ідеальну пружність, тобто після зняття навантаження деформації повністю зникають.

Розглянемо тепер гіпотези, пов’язані з деформаціями елементів конструкцій. Зміну лінійних і кутових розмірів тіла називають відповідно лінійною і кутовою деформаціями. Зміну положення (координат) точок тіла, спричинену деформацією, називають переміщенням.

6. Гіпотеза про малість деформацій. За цим припущенням деформації тіла і пов’язані з ними переміщення точок і перерізів дуже малі порівняно з розмірами тіла. На підставі цього змінами в розміщенні зовнішніх сил, спричинених деформацією, нехтують.

7. Гіпотеза про лінійну залежність між навантаженням і деформацією. Згідно з цією гіпотезою, зміщення точок і перерізів пружного тіла в певних межах навантаження прямо пропорційне силам, які спричиняють ці переміщення.

8. Гіпотеза плоских перерізів, або гіпотеза Бернуллі. Згідно з цією гіпотезою, плоскі поперечні перерізи, зроблені в тілі до деформації, залишаються під час деформації плоскими і нормальними до осі.

## **1.4 Види навантажень і основних деформацій**

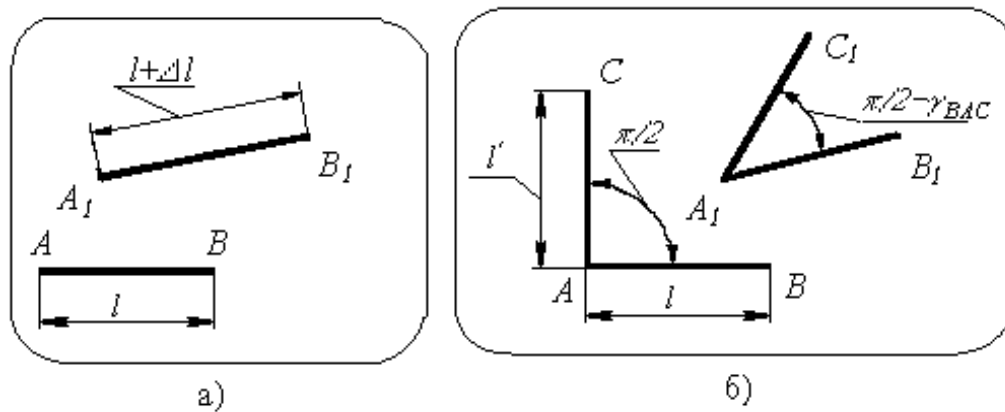


Рисунок 1.1

У процесі роботи машин і споруд їх вузли і деталі сприймають і передають різні навантаження, тобто сили дії, які спричиняють зміну внутрішніх сил і деформації вузлів і деталей. Сили бувають масові або об'ємні (сили тяжіння, сили інерції), або поверхневі, які зумовлені контактною взаємодією розглядуваного елемента з сусідніми елементами або прилеглим до нього середовищем (наприклад, пара, повітря, рідина).

З теоретичної механіки відомо, що поверхневі навантаження бувають зосередженими або розподіленими. Залежно від характеру дії навантаження поділяють на статичні і динамічні.

Динамічними називають навантаження, значення яких, напрям або місце прикладання швидко змінюються з часом. До динамічних належать ударні, раптово прикладені і повторно-змінні навантаження. Ударні навантаження виникають, наприклад, під час кування металу або забивання паль; прикладом раптово прикладеного навантаження є тиск колеса, яке котиться по рейці; повторно-змінних навантажень зазнають, наприклад, деталі кривошипно-повзунного механізму двигуна.

Треба пам'ятати, що до зовнішніх сил, які беруть до уваги при розрахунках конструкцій, належать не тільки активні сили, а й реакції опор і сили інерції.

Перейдемо до розгляду питання про основні деформації. Під дією зовнішніх сил тіло деформується, тобто його точки змінюють своє положення в просторі. Проекції вектора переміщення на осі вибраної системи координат позначаються  $U$ ,  $V$ ,  $W$  відповідно осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Крім лінійних є кутові переміщення: відрізок прямої між двома близькими точками в результаті дії зовнішніх сил не тільки міняє свої розміри, а повертається в просторі на деякий кут.

При визначенні деформації в околі довільної точки  $A$  (рисунок 1.1, а) розглядають малий відрізок  $AB$  довжиною  $l$ , проведений через цю точку в довільному напрямку. В результаті деформації відрізок  $AB$  переміститься і поміняє свою довжину на  $\Delta l$ , тоді відношення

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.1)$$

називається відносною лінійною деформацією в точці  $A$ , в напрямку  $AB$ . В тій же точці, в іншому напрямку деформація буде іншою. Якщо розглядають деформації в напрям координатних осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  то їх позначають відповідно  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ .

Крім лінійних деформацій мають місце також кутові деформації (рисунок 1.1, б). Кутова деформація – це величина зміни прямого кута в процесі деформування між двома перпендикулярними до деформації прямими, проведеними через точку  $A$ . Вона називається деформацією зсуву. В координатних площинах деформації зсуву позначають  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ .

Сукупність лінійних та кутових деформацій в різних напрямках і в різних площинах, які проходять через розглядувану точку середовища, визначають деформований стан в точці.

### 1.5 Внутрішні сили. Метод перерізів

У будь-якому тілі між його мікрочастинками завжди існують сили взаємодії, які зумовлюють існування тіла, як єдиного цілого.

При дії на тіло, що являє собою елемент якої-небудь машини або будівельної конструкції, зовнішніх сил у будь-якому його перерізі виникають додаткові, внутрішні сили взаємодії між частинками тіла (крім тих, що існували в цьому елементі, коли він був ненавантажений), які перешкоджають зміні відстаней між цими частинками і руйнування тіла. Ці сили часто називають внутрішніми силами пружності.



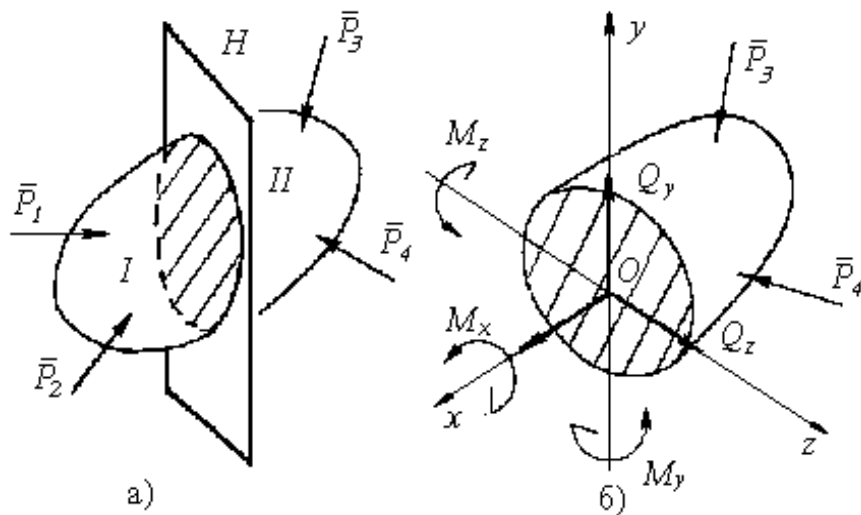


Рисунок 1.2

Для встановлення величини внутрішніх сил, що виникають у перерізі стрижнів, які підлягають зовнішній силевій дії, використовується метод перерізів. Нехай є деяке пружне тіло (рисунок 1.2, а), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Розділимо це тіло деякою площиною  $H$  на дві частини  $I$  і  $II$ . Відкинемо одну з частин, наприклад  $I$  і розглянемо умови рівноваги частини  $II$  (рисунок 1.2, б), що залишилася. Щоб ця частина була в рівновазі, як і у випадку, коли вона була частиною цілого тіла, треба, щоб крім зовнішніх сил, прикладених до неї, були збережені й раніше діючі на цю частину внутрішні сили взаємодії, що виникають між частинами  $I$  і  $II$  під впливом зовнішніх сил.

Згадані внутрішні сили, суцільно розподілені по зробленому перерізу, очевидно, можна звести до деякої системи сил, яка замінює вплив відкинutoї частини тіла на ту, що залишилася.

Якби ми розглядали рівновагу частини  $I$ , відкинувши частину  $II$ , то вплив відкинutoї частини, очевидно, врахувався б такими самими внутрішніми силами, прикладеними до частини  $I$  у тому самому перерізі, але у зворотному до попереднього напрямку.

У найбільш загальному випадку систему внутрішніх сил можна звести до однієї сили  $R$  (головного вектора) і однієї пари сил  $M$  (головного моменту).

При визначенні внутрішніх сил в стержнях рекомендується проводити переріз перпендикулярно до осі стержня. Виберемо осі координат  $x, y, z$  з початком в центрі ваги перерізу так, щоб осі  $Oy$  і  $Oz$  лежали в його площині. Розкладемо головний вектор  $R$  на складові по осях координат:  $N, Q_y, Q_z$ , а головний момент  $M$  – на три моменти:  $M_x, M_y$  і  $M_z$  (рисунок 1.2, б).

Ці шість зусиль можуть бути легко знайдені з рівнянь рівноваги (рівнянь статки), записаних для будь-якої із частин

$$\sum_{i=1}^n P_{yi} + Q_y = 0, \quad (1.2) \quad \sum_{i=1}^n m_{yi} + M_y = 0, \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{zi} + Q_z = 0, \quad (1.3) \quad \sum_{i=1}^n m_{zi} + M_z = 0, \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{xi} + N = 0, \quad (1.4) \quad \sum_{i=1}^n m_{xi} + M_x = 0, \quad (1.7)$$

де  $P_{yi}, P_{zi}, P_{xi}$  – проекції зовнішніх сил на відповідні осі;  $m_{yi}, m_{zi}, m_{xi}$  – моменти зовнішніх сил відносно відповідних осей.

Шість величин  $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y$  і  $M_z$  прийнято називати внутрішніми силовими факторами або внутрішніми зусиллями. Кожна із цих сил має свою назву. Силу  $N$ , що діє вздовж осі  $x$ , називають повздовжньою, або нормальною силою. Сили  $Q_y$  і  $Q_z$  називають поперечними силами. Моменти  $M_y$  і  $M_z$ , очевидно, намагатимуться зігнути стержень у площинах  $xOy$  і  $xOz$ , тому їх називають згинальними, а момент  $M_x$ , який скручує стержень, називають крутним моментом.

## 1.6 Напруження в перерізі

Напруження – це інтенсивність внутрішніх сил (внутрішнє зусилля, що припадає на одиницю площі поперечного перерізу).

Якщо, наприклад, на площадку  $dA$  діє внутрішня сила  $dR$  (рисунок 1.3), то повне напруження

$$\vec{P} = \frac{dR}{dA}, \quad (1.8)$$

Величина повного напруження  $P$  залежить від орієнтації площадки, проведеної через точку, яку розглядаємо. Повне напруження у загальному випадку можна розкласти на дві складові: складову, нормальну до виділеної площадки будемо називати нормальним напруженням

$$\sigma_x = \frac{dN}{dA}, \quad (1.9)$$

Складову, дотичну до цієї площадки, будемо називати дотичним, або тангенціальним напруженням

$$\tau = \frac{dQ}{dA}, \quad (1.10)$$

Дотичне напруження  $\tau$  має різні напрямки і величину, тому замість одного напруження  $\tau$ , розглядають два дотичних напруження  $\tau_{yx}$  і  $\tau_{zx}$ , які напрямлені паралельно осям  $y$ ,  $z$  і діють на площадці, нормаль до якої збігається з віссю  $x$ .

$$\tau_{yx} = \frac{dQ_y}{dA}, \quad \tau_{zx} = \frac{dQ_z}{dA} \quad (1.11)$$

Як видно із рисунка 1.3

$$\tau^2 = \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (1.12)$$

Шість внутрішніх силових факторів  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  і  $M_z$  є інтегральними величинами, тому що вони рівнодійні розподілених по перерізу внутрішніх сил. Між напруженнями і внутрішніми силами існують такі інтегральні залежності (див. рис. 1.3 і формули (1.9 – 1.11))

$$\begin{aligned} N &= \int_A dN = \int_A \sigma_x dA, \\ Q_y &= \int_A dQ_y = \int_A \tau_{yx} dA, \\ Q_z &= \int_A dQ_z = \int_A \tau_{zx} dA, \\ M_y &= \int_A dN z = \int_A \sigma_x z dA, \\ M_z &= \int_A dN y = \int_A \sigma_x y dA, \\ M_x &= \int_A (dQ_y z - dQ_z y) = \int_A (\tau_{yx} z - \tau_{zx} y) dA = \int_A \rho \tau dA, \end{aligned} \quad (1.13)$$

де  $z$ ,  $y$  – координати площадки  $dA$ .

## 2 РОЗТЯГАННЯ І СТИСКАННЯ

### 2.1 Напруження і деформації

Центральний (осьовий) розтяг або стиск виникає від сил, прикладених до осі бруса (рисунок 2.1). Напружений стан, що спричиняється такими силами, називають простим або лінійним (одновісним). В силу гіпотези плоских перерізів напруження по перерізу розподіляються рівномірно, що може бути виражено формулою

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

де  $\sigma$  – нормальне напруження в поперечному перерізі;  
 $N$  – зусилля в цьому перерізі;  
 $A$  – площа перерізу.

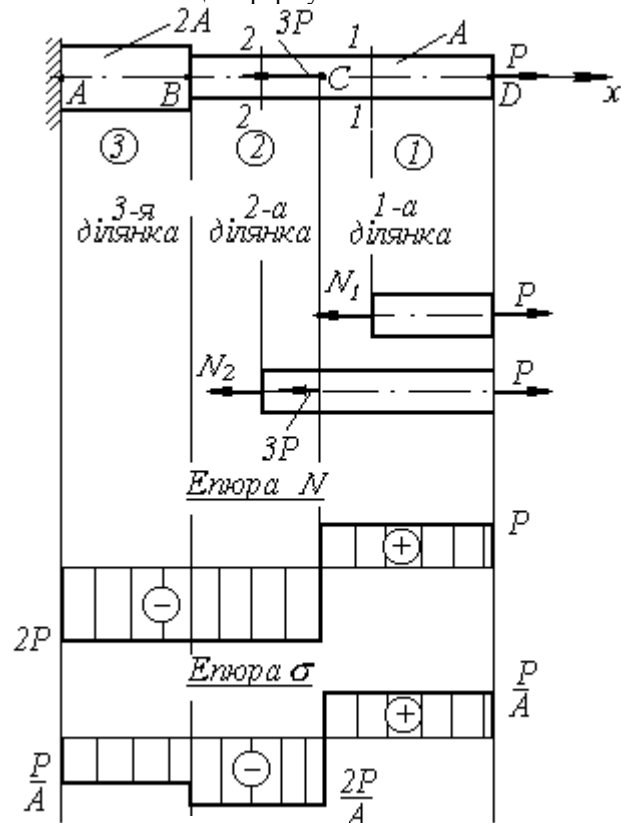


Рисунок 2.1

В різних перерізах одного і того ж бруса внутрішні зусилля  $N$  різні. При розрахунках необхідно знати внутрішні зусилля в будь-якому перерізі. Тому будують графіки  $N(x)$ , з яких видно, як змінюються внутрішні зусилля  $N$  вздовж осі бруса. Такі графіки називають епюрами внутрішніх зусиль.

Розглянемо східчастий брус, затиснутий лівим кінцем (рисунок 2.1), вздовж осі якого діють активні сили  $P$  і  $3P$ . Частини бруса сталого перерізу, що містяться між площинами, в яких прикладені активні або реактивні сили, називаються ділянками. Таким чином межами ділянок є точки прикладання зовнішніх сил, а також

місця зміни розмірів поперечного перерізу. Даний брус (рисунок 2.1) складається з трьох ділянок.

Для побудови епюри повздовжньої сили  $N$  використаємо метод перерізів і рівняння рівноваги (1.4). Розтяжні (направлені від перерізу) повздовжні сили вважатимемо додатними, а стисківні (направлені до перерізу) – від'ємними. Зробимо переріз 1–1. В усіх точках перерізу діятимуть внутрішні розподілені сили, рівнодійна яких  $N_1$ , визначається з умови рівноваги однієї з частин бруса, наприклад, правої

$$\sum X = \sum P_{xi} + N = 0, \quad P - N_1 = 0$$

Звідки  $N_1 = P$

Повздовжня сила – це рівнодійна внутрішніх нормальних сил, які виникають у поперечному перерізі. Знаходимо величину повздовжньої сили в перерізі 2–2.

$$\sum X = 0, \quad -N_2 - 3P + P = 0, \quad N_2 = 2P.$$

Таким чином, повздовжня сила в поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють з одного боку перерізу.

Для побудови епюри повздовжньої сили  $N$  під рисунком бруса проведемо лінію, паралельну осі бруса. Ця лінія називається базовою (рис. 2.1). Величини повздовжніх сил у довільному масштабі відкладемо перпендикулярно до базової лінії, причому додатні значення (розтягання) відкладемо вгору, а від'ємні (стискання) – вниз від базової лінії. Епюру штрихуємо тонкими лініями перпендикулярними до осі. У точках прикладання зосереджених сил на епюрі  $N$  мають місце стрибкоподібні зміни, причому

величина “стрибка” дорівнює модулю прикладеної в перерізі бруса зовнішньої зосередженої сили (рисунок 2.1).

Очевидно, що значення ординати епюри повздовжніх сил під закріпленням дорівнює реакції закріплення. Зазначимо, що за методом перерізів зручніше розглядати рівновагу частини бруса, розміщеної з боку вільного кінця, у протилежному випадку потрібно заздалегідь визначити і вводити в рівняння рівноваги реакцію закріплення.

Щоб побудувати епюру  $\sigma$ , визначимо за формулою (2.1) нормальні напруження на ділянках бруса, беручи значення  $N$  із епюри  $N(x)$ . Тоді на першій, другій і третій ділянках будемо мати

$$\sigma_1 = \frac{P}{A}; \quad \sigma_2 = -\frac{2P}{A}; \quad \sigma_3 = -\frac{2P}{2A} = -\frac{P}{A}$$

Правила побудови епюри  $\sigma(x)$  такі самі, як і для епюри  $N(x)$ , включаючи і правило знаків. У межах кожної ділянки напруження сталі, тому епюра  $\sigma(x)$  на кожній ділянці паралельна осі (рисунок 2.1).

У розрахунках на міцність привертують особливу увагу ті перерізи бруса, в яких напруження за абсолютними значеннями максимальні. Ці перерізи можуть бути небезпечними. У розглянутому прикладі небезпечними є перерізи бруса на 2-й ділянці.

Перейдемо до розгляду деформацій. Уявимо прямий брус сталого поперечного перерізу  $A_0$  і довжиною  $l_0$  (рисунок 2.2). Під дією сили  $P$  брус видовжиться на деяку величину  $\Delta l$

$$\Delta l = l - l_0 \quad (2.2)$$

яку називають абсолютним видовженням.

При розтяганні бруса його поперечні розміри зменшуються. При цьому абсолютна поперечна деформація дорівнюватиме

$$\Delta a = a - a_0 \quad (2.3)$$

Відношення абсолютного видовження  $\Delta l$  до початкової довжини  $l_0$  називають відносним видовженням і позначають  $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.4)$$

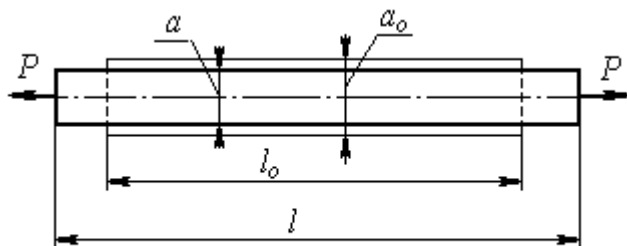


Рисунок 2.2

Аналогічно, відносна поперечна деформація дорівнює

$$\epsilon' = \frac{\Delta a}{a} \quad (2.5)$$

Зв'язок між відносною поперечною і відносною повз-

довжною деформаціями виражається формулою

$$\epsilon' = -\mu \epsilon \quad (2.6)$$

де  $\mu$  – безрозмірний коефіцієнт поперечної деформації – коефіцієнт Пуассона. Знак “мінус” у формулі (2.6) говорить про те, що деформації  $\epsilon'$  і  $\epsilon$  мають різні знаки, а коефіцієнт Пуассона визначається за формулою

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| \quad (2.7)$$

Величина  $\mu$  для різних матеріалів не однакова: так, для сталі  $\mu=0.25-0.3$ , для каучуку  $\mu=0.47$ . Значення  $\mu$  для різних матеріалів приводяться в довідниках.

## 2.2 Закон Гука при розтяганні і стисканні

Напруження і деформації розтягання і стискання пов'язані між собою залежністю, яку називають законом Гука, за ім'ям англійського фізика Роберта Гука (1635–1703), що встановив цей закон. Закон Гука справедливий лише у певних межах навантаження і формулюється так: нормальне напруження прямо пропорційне відносному видовженню або укороченню

$$\sigma = E \epsilon \quad (2.8)$$

Коефіцієнт пропорційності  $E$  характеризує жорсткість матеріалу, тобто його здатність протидіяти пружним деформаціям розтягу або стиску і називається модулем повздовжньої пружності, модулем пружності першого роду, модулем Юнга.

Для сталі

$$E=(1,8...2,2) \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2=(1,8...2,2) \cdot 10^{11} \text{ Па}=(1,8...2,2) \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

З врахуванням (2.1) і (2.4) отримаємо другу формулу закону Гука

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (2.9)$$

За формулою (2.9) можна знайти деформацію ділянки стержня довжиною  $l$ , якщо в межах цієї ділянки  $N$  і  $A$  стали величини.

Повна деформація стержня, який має  $n$  ділянок дорівнює

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \quad (2.10)$$

Якщо нормальна сила  $N$  і площа перерізу  $A$  в межах ділянки  $l$  є змінними величинами, то

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x) dx}{EA(x)} \quad (2.11)$$

Величина  $EA$  називається жорсткістю перерізу, а  $EA/l$  – жорсткістю бруса. Чим більша площа  $A$  і менша довжина  $l$  бруса, тим більша його жорсткість.

### 2.3 Діаграма розтягання. Механічні характеристики матеріалу

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які характеризують їх міцність, пластичність, пружність, твердість, а також пружні сталі  $E$  і  $\mu$  потрібні конструктору для вибору матеріалів та розрахунків проєктованих деталей, визначають за допомогою механічних випробувань стандартних зразків, виготовлених з досліджуваного матеріалу. У цьому розділі докладно розглянемо діаграму, отриману в процесі найбільш поширеного і важливого механічного випробування, а саме випробування на розтягання маловуглецевої сталі при статичному навантаженні. У процесі цього випробування спеціальний пристрій випробувальної машини креслить діаграму, яка показує залежність між розтягуювальною силою  $P$  і абсолютним видовженням  $\Delta l$  (рисунок 2.3).

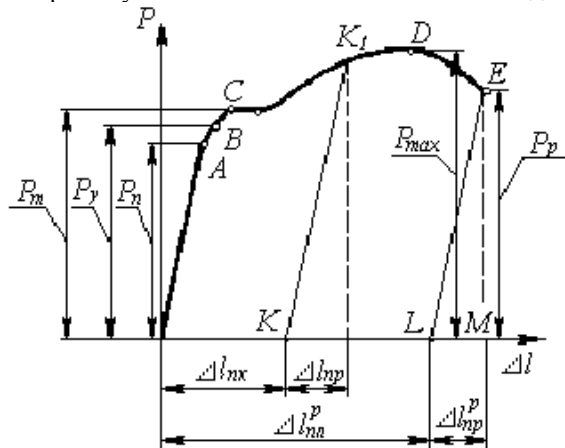


Рисунок 2.3

Для того щоб отримати механічні характеристики матеріалу, які не залежать від розмірів зразка, застосовують діаграму в координатах  $\sigma - \epsilon$  (рисунок 2.4). Напруження і деформації при цьому розраховують за формулами (2.1) і (2.4). Така діаграма характеризує властивості матеріалу і відрізняється від діаграми  $P - \Delta l$  (рисунок 2.3) лише масштабами.

Використовуючи діаграму

розтягання (рисунок 2.4) отримують характеристики міцності і пластичності матеріалу. До характеристик міцності відносять напруження  $\sigma_{m}$ ,  $\sigma_{np}$ ,  $\sigma_m$ ,  $\sigma_s$ , і  $\sigma_p$ .

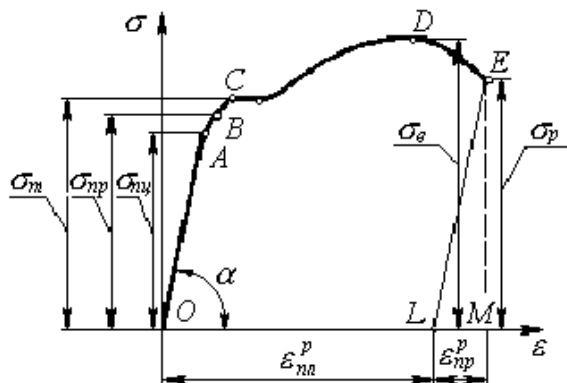


Рисунок 2.4

Границя пропорційності – це напруження, вище якого закон Гука не виконується (точка A на діаграмі)

$$\sigma_{\cdot, b} = \frac{m_{\cdot, b}}{A_0} \quad (2.12)$$

де  $P_{m}$  – сила, до якої зберігається лінійна залежність між зусиллям та деформацією (рисунок 2.3),  $A_0$  – початкова площа перерізу зразка.

Ділянка діаграми  $\sigma - \epsilon$ , яка знаходиться нижче від точки A, прямолінійна, що є вираженням закону Гука. Тангенс кута нахилу цієї ділянки є модуль пружності

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \quad (2.13)$$

Границею пружності називають таке найбільше напруження, до якого деформації залишаються практично пружними (точка *B* на діаграмі)

$$\sigma_{np} = \frac{P_{np}}{A_0} \quad (2.14)$$

Границя пружності за своєю величиною для сталей мало відрізняється від границі пропорційності. Тому  $\sigma_{mц}$  і  $\sigma_{np}$  на практиці часто ототожнюють.

Границя текучості – це напруження, при якому сильно зростають деформації при майже сталій силі (точка *C* на діаграмі).

$$\sigma_m = \frac{P_m}{A_0} \quad (2.15)$$

де  $P_m$  – сила, при якій метал “тече”. Границя текучості  $\sigma_m$  – це основна механічна характеристика для оцінки міцності пластичних матеріалів.

З появою текучості матеріалу на діаграмі з’являється горизонтальна ділянка – так звана площадка текучості. Треба відмітити, що чітко виражену площадку текучості мають лише діаграми розтягу маловуглецевої сталі і деяких сплавів кольорових металів. Для матеріалів, діаграми розтягу яких не мають чітко вираженої площадки текучості, або зовсім її не мають, вводиться поняття умовної границі текучості – напруження, при якому відносне залишкове видовження зразка дорівнює 0.002 або 0.0002. Умовну границю текучості позначають  $\sigma_{0.2}$  або  $\sigma_{0.02}$ , відповідно величині залишкової деформації.

Границя міцності (тимчасовий опір) – це напруження, що відповідає максимальній силі, яку витримує зразок (точка *D* на діаграмі)

$$\sigma_{\epsilon} = \frac{P_{\max}}{A_0} \quad (2.16)$$

У цей час (точка *D*) у випробуваному зразку починає утворюватись місцеве звуження, яке називається шийкою. Поява шийки свідчить про початок руйнування зразка. При цьому, оскільки шийка швидко росте (площа перерізу зменшується), сила, що діє на зразок, падає (ділянка *DE* діаграми рисунок 2.3) і він розривається при значно меншій силі  $P_p$ , ніж максимальна сила  $P_{\max}$  при випробуванні.

Розривне напруження – це напруження в зразку в момент розриву. Його визначають за формулою

$$\sigma_p = \frac{P_p}{A_0} \quad (2.17)$$

Слід відмітити, що напруження  $\sigma_p$  (точка *E* діаграми рисунок 2.4) виникає у зразку в момент розриву, у всіх поперечних перерізах, крім перерізу шийки. Дійсне напруження в шийці більше  $\sigma_p$  і навіть більше  $\sigma_{\epsilon}$ .

Деформація зразка за границею пружності складається з пружної і залишкової (пластичної), причому пружна частина деформації підлягає закону Гука і за границею пропорційності. Якщо в точці  $K_1$  навантаження зняти, то зразок розвантажиться по прямій  $K_1K$ , діаграми (рисунок 2.3). При цьому залишкова деформація буде дорівнювати  $\Delta l_{nl}$ , а пружна –  $\Delta l_{np}$ . При повторному навантаженні того самого зразка його деформація відповідатиме діаграмі  $KK_1DE$ . Отже, при повторному навантаженні зразка, раніше навантаженого більше, ніж границя пружності, механічні властивості матеріалу змінюються, а саме: підвищується міцність ( $\sigma_{mц}$ ,  $\sigma_{np}$ ,  $\sigma_m$ ) і зменшується пластичність на величину  $\Delta l_{nl}$  (рисунок 2.3). Це явище називається наклепом. Іноді наклеп не бажаний. В інших випадках наклеп створюють навмисно. Наприклад дріт, який витягують волочінням, у результаті наклепу має значно більшу міцність, ніж точений зразок з того самого матеріалу.

Крім перерахованих характеристик міцності, велике значення мають також механічні характеристики пластичності матеріалу, які визначаються безпосереднім вимірюванням зразка після розриву. Основними кількісними характеристиками пластичності матеріалу є:

відносне залишкове видовження після розриву

$$\delta = \frac{\Delta l_{nl}^p}{l_0} \quad (2.18)$$

і відносне залишкове звуження перерізу зразка в місці розриву

$$\psi = \frac{A_0 - A_{ul}}{A_0} \quad (2.19)$$

де  $\Delta_{nl}^P = l_0 - l_p$ ,  $l_0$  – довжина розрахункової частини зразка до випробування,  $l_p$  – довжина розрахункової частини зразка після розриву,  $A_0$  – початкова площа перерізу,  $A_m$  – площа перерізу зразка в місці розриву (в місці шийки). Чим вищі значення характеристик  $\delta$  і  $\psi$ , тим матеріал більш пластичний.

## 2.4 Допустиме напруження

Умови міцності вимагають, щоб напруження, які виникають в елементах конструкцій, не перевищували допустимих. Допустимі напруження  $[\sigma]$  становлять деяку частину від небезпечних напружень. Для пластичних матеріалів таким небезпечним напруженням є границя текучості  $\sigma_m$ , при якій деформації, що швидко зростають перешкоджають нормальній експлуатації конструкції. Для крихких матеріалів небезпечним напруженням є границя міцності  $\sigma_c$ , при якій настає руйнування матеріалу. Допустиме напруження визначають за формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma_n}{n} \quad (2.20)$$

де  $\sigma_n = \sigma_m$  – для пластичних матеріалів і  $\sigma_n = \sigma_c$  – для крихких,  $n$  – коефіцієнт запасу міцності при дії на конструкцію статичного навантаження встановлюється в межах  $n = 1,5 \dots 2$ , для крихких –  $n = 3 \dots 5$ , а іноді і вище (наприклад, для каменів природних і штучних він може бути в межах  $n = 10 \dots 30$ ). Коефіцієнт запасу міцності залежить також від умов роботи конструкції, точності розрахунків напружень, характеру навантажень.

## 2.5 Розрахунки на міцність за допустимими напруженнями

При розрахунках за допустимими напруженнями міцність конструкції або її елементів буде забезпечена, якщо максимальне напруження  $\sigma_{max}$  не перевищує допустимого, тобто виконується умова

$$\sigma_{max} \leq [\sigma], \quad \sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (2.21)$$

Формула (2.21) дає можливість розв'язувати такі інженерні задачі:

1. Підбір перерізу елемента конструкції при відомих силах, що діють на елемент (проектний розрахунок)

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} \quad (2.22)$$

2. Перевірний розрахунок, при якому визначають напруження і порівнюють його з допустимим

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (2.23)$$

3. Визначення допустимого навантаження на існуючий елемент

$$[N] = [\sigma] \cdot A \quad (2.24)$$

Порядок виконання розрахунків.

1. Будуєть епюри нормальних сил і напружень (рисунок 2.1).

2. Задовольняють умову міцності (2.21) для перерізу, в якому має місце максимальне напруження. Якщо матеріал по різному чинить опір розтягання і стисканню (характерно для крихких матеріалів), то найбільші розтягувальні напруження не повинні перевищувати допустимих напружень на розтягання  $[\sigma]_p$ , а найбільші стискувальні напруження – допустимих напружень на стискання  $[\sigma]_c$ .

## 2.6 Статично невизначені задачі

Задачі на розрахунок конструкцій, в елементах яких силові фактори не можна визначити за допомогою лише рівнянь рівноваги статки, називають статично невизначуваними. При розв'язуванні таких задач, рівнянь яких не вистачає для визначення зусиль, складають на основі умов деформацій бруса або системи додаткові рівняння. Ці додаткові рівняння називають рівняннями сумісності деформацій (нерозривності деформацій). Від зв'язку між деформаціями, використовуючи закон Гука, переходять до рівнянь, які зв'язують зусилля в деформованих елементах. Рівняння сумісності деформацій мають різну форму, залежно від характеру задачі. Кількість таких задач визначає ступінь статичної невизначуваності задачі, який, очевидно дорівнює різниці між кількістю невідомих і кількістю рівнянь статки, які можна скласти.

Наведемо кілька прикладів.

Приклад 1.

Жорстка балка підтримується двома стержнями, як показано на рисунку 2.5. Перший стержень повинен мати площу поперечного перерізу в два рази більшу ніж другий; для матеріалу стержнів прийняти допустиме напруження  $[\sigma]=1600 \text{ кг/см}^2$ . Визначити площу поперечного перерізу стержнів.

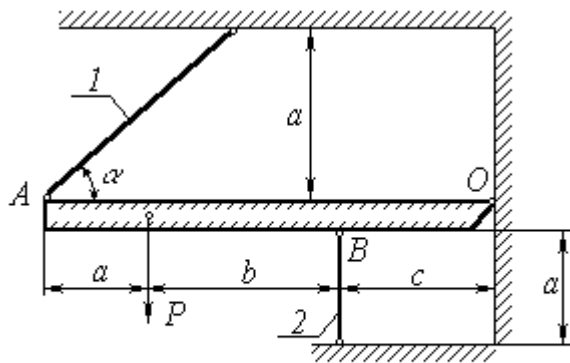


Рисунок 2.5

Дано:  $a=1 \text{ м}; b=2 \text{ м}; c=1,5 \text{ м}$

$\alpha=45^\circ; P=120 \text{ кН}; A_1=2A_2$

$E_1=E_2=E; [\sigma]=160 \text{ МПа}$

Визначити:  $A_1-?; A_2-?$

Розв'язування:

В задачі потрібно визначити площі перерізів стержнів, тобто провести проектний розрахунок. Оскільки стержні системи працюють на розтягання–стискування, то проектний розрахунок виконується за формулою

$$A_1 \geq \frac{|N|}{[\sigma]}$$

Допустиме напруження задано, тому потрібно визначити нормальні сили в поперечних перерізах стержнів 1 і 2.

Використаємо метод перерізів і переріжимо стержні поперечними перерізами, відкинемо верхню частину стержня 1 і нижню частину стержня 2, замінимо їх дію нормальними силами  $N_1$  та  $N_2$ . Використовуючи формальний підхід, припустимо, що обидва стержні розтягнуті, тобто направимо  $N_1$  та  $N_2$  від перерізів. Відкинемо також шарнір і замінимо реакціями  $R_x$  та  $R_y$  (рисунк 2.6, а).

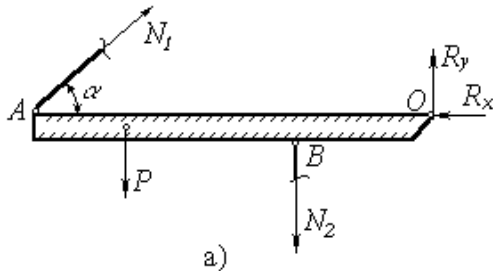
Для визначення чотирьох невідомих реакцій  $N_1, N_2, R_x, R_y$  ми можемо скласти лише 3 незалежних рівняння статки, тобто

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_O = 0.$$

Отже, система 1 раз статично невизначувана.

Перші 2 рівняння статки крім  $N_1$  та  $N_2$  містять невідомі реакції  $R_x$  та  $R_y$ , визначати які немає необхідності. Отже, відносно невідомих зусиль  $N_1$  та  $N_2$  ми маємо лише одне рівняння:

$$\sum M_O = P(b+c) - N_1(a+b+c) \cos 45^\circ + N_2 \cdot c = 0 \quad (2.25)$$



а)

Для визначення  $N_1$  та  $N_2$  необхідно скласти рівняння сумісності переміщень. З цією метою розглянемо систему в деформованому стані. Методом засічок визначимо видовження  $\Delta l_1$ .

Із подібності трикутників  $\Delta OBB_1 \sim \Delta OAA_1$

$$\text{впливає} \quad \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{a+b+c}{c} = \frac{4,5}{1,5} = 3$$

$$AA_1 = 3BB_1 \quad (2.26)$$

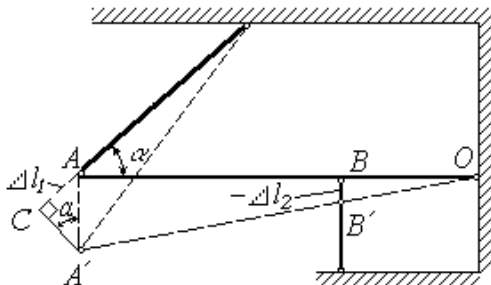


Рисунок 2.6

Із  $\Delta AA_1C$   $AA_1 = \Delta l_1 / \sin 45^\circ$  На початку розв'язування задачі ми прийняли стержні розтягнуті, але за схемою

деформації другий стержень виявився стиснутим, таким чином відрізок  $BB_1$  дорівнює  $\Delta l_2$  із знаком мінус, тобто  $BB_1 = -\Delta l_2$ .

З врахуванням цього отримаємо рівняння сумісності переміщень



$$\frac{\Delta l_1}{\sin 45^\circ} = -3\Delta l_2 \quad (2.27)$$

Виразимо  $\Delta l_1$  та  $\Delta l_2$  через зусилля в стержнях  $N_1$  та  $N_2$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E A_2}$$

Враховуючи, що  $A_1 = 2A_2$ ,  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $l_1 = \frac{a}{\sin 45^\circ}$ , підставимо вирази для  $\Delta l_1$  та  $\Delta l_2$  в рівняння (2.27)

$$\frac{N_1 \cdot a \cdot 2 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot E \cdot 2 \cdot A_2 \cdot 2} = - \frac{N_2 \cdot a}{E \cdot A_2}$$

$$N_1 = -3N_2 \quad (2.28)$$

Сумісним розв'язуванням рівнянь (2.25) та (2.28) визначаємо  $N_1$  та  $N_2$

$$P(b+c) + 3N_2(a+b+c)\cos 45^\circ + N_2 c = 0,$$

$$P(b+c) + N_2[3(a+b+c)\cos 45^\circ + c] = 0,$$

$$N_2 = \frac{-P(b+c)}{3(a+b+c)\cos 45^\circ + c} = \frac{-120 \cdot 10^3 \cdot 3,5}{3 \cdot 4,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1,5} = -\frac{12 \cdot 10^4 \cdot 7}{3 \cdot (4,5\sqrt{2} + 1)} = -38 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

$$N_1 = -3N_2 = 114 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

Отримані знаки зусиль говорять про те, що при навантаженні системи силою  $P$  стержень 1 розтягується, а стержень 2 стискається. Порівняння величин  $N_1$  та  $N_2$  показує, що перший стержень більш навантажений. Визначаємо необхідну площу  $A_1$

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{114000}{160 \cdot 10^6} = 7,12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 7,12 \text{ см}^2$$

Приймаємо  $A_1 = 7,2 \text{ см}^2$

$$\text{Тоді } A_2 = \frac{A_1}{2} = 3,6 \text{ см}^2$$

Перевіримо міцність 2-го стержня

$$\sigma_2 = \frac{|N_2|}{A_2} = \frac{38000}{3,6 \cdot 10^{-4}} = 105,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 105,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Умова міцності виконується

Приклад 2.

Визначити зусилля в перерізах стержня (рисунок 2.7.).

Дано:  $E_{ст} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $E_{м} = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;

$A_m = A_{ст} = A$ ;  $P = 30 \text{ кН}$ .

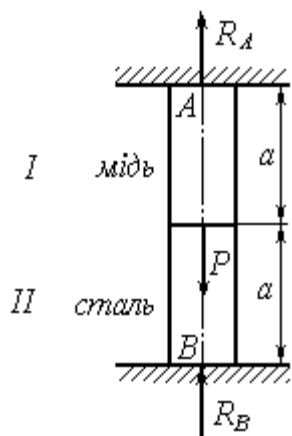


Рисунок 2.7

Розв'язування:

Для визначення зусиль в поперечних перерізах використовують метод перерізів. Але для того, щоб використати цей метод нам необхідно визначити опорні реакції. Відкинемо опори і замінимо їх реакціями  $R_A$  і  $R_B$ . Сумістимо вісь  $z$  з віссю бруса. Для визначення невідомих  $R_A$  і  $R_B$  ми маємо лише одне рівняння статички

$$\sum Z=0 \quad R_A + R_B - P=0.$$

Дана задача відноситься до категорії статично

**НЕВИЗНАЧУВАНИЛ.** При цьому ступінь статичної невизначуваності дорівнює 1, тобто необхідно скласти одне рівняння сумісності переміщень.

З умови закріплення бруса очевидно, що переміщення крайніх перерізів  $A$  і  $B$  дорівнюють нулю (оскільки вони закріплені). Відкинемо нижнє закріплення, замінимо його дію реакцією  $R_B$ , значення якої поки що не відоме. Таким чином отримаємо статично визначуваний брус навантажений силами  $P$  і  $R_B$ . Переміщення перерізу  $B$  визначається сумою деформацій 1-ї та 2-ї ділянок, тобто  $\delta_z = \Delta_1 + \Delta_2$ . Але з умови закріплення  $\delta_z=0$ . Тоді рівняння сумісності переміщень має вигляд:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 0 \tag{2.29}$$

$$\Delta_1 = \frac{N_1 a}{E_m A}; \quad N_1 = P - R_B;$$

$$\Delta_2 = \frac{N_2 a}{E_{cm} A}; \quad N_2 = -R_B$$

Підставляючи в (2.29) отримаємо, з врахуванням того, що  $E_{cm}=2E_m$

$$\frac{(P - R_B)a}{E_m A} + \frac{(-R_B)a}{2E_m A} = 0,$$

$$2(P - R_B) - R_B = 0$$

Звідси отримаємо  $R_B = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3} \cdot 30000 = 20000 \text{ Н}$

З рівняння (2.29)  $R_A = \frac{1}{3}P = \frac{1}{3} \cdot 30000 = 10000 \text{ Н}$

Методом перерізів визначаємо, що в перерізах 1-ї ділянки  $N_1=10 \text{ кН}$ , а в перерізах 2-ї ділянки  $N_2=-20 \text{ кН}$ .

Знаки зусиль показують, що перша, тобто мідна ділянка стержня – розтягнута, а друга (стальна) – стиснута.

### 2.7 Розрахунок температурних напружень в СНС

Особливістю статично невизначуваних систем (СНС) є виникнення в них температурних напружень. Температурними називаються напруження, які виникають в СНС при зміні температури всіх або окремих елементів системи.

Оскільки визначення температурних напружень є статично невизначуваною задачею, то доцільно їх розрахунки проводити за таким планом:

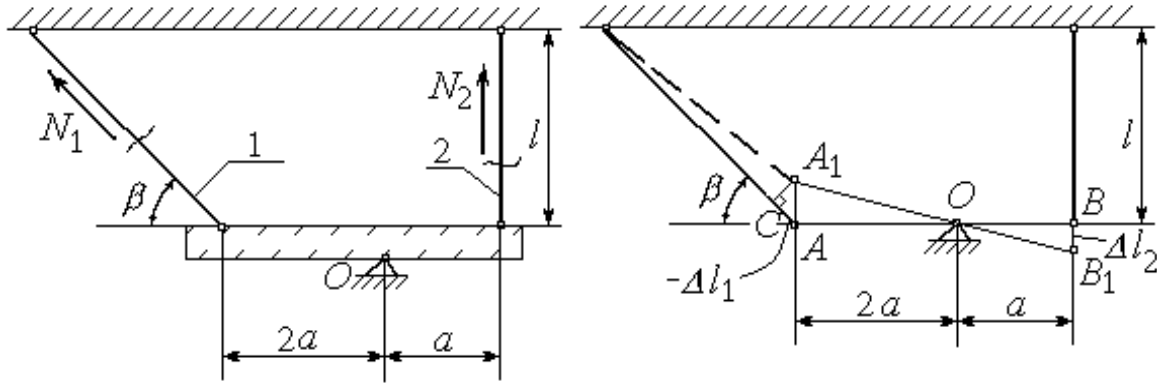
1. Записати незалежні рівняння статички.
2. Встановити ступінь статичної невизначуваності.

3. Скласти рівняння сумісності переміщень.
4. Замінити деформації через зусилля за законом Гука.
5. Розв'язати отриману систему рівнянь, визначити внутрішні зусилля.
6. Розрахувати напруження.

Приклад 3.

Жорсткий брус (рисунок 2.8), крім шарнірної опори, підтримується ще двома стальними тягами з площею поперечного перерізу  $A_1=40 \text{ см}^2$  та  $A_2=20 \text{ см}^2$ . Після встановлення тяг їх температура підвищилась на  $\Delta t=+20^\circ$ . Визначити напруження в тягах.

Розв'язування:



Передбачити напрямок зусиль неможливо, тому припустимо, що система буде деформуватись таким чином, що обидва стержні будуть розтягнуті, тобто перший стержень буде після нагрівання розтягнутий зусиллям  $N_1$ , а другий розтягнутий зусиллям  $N_2$ . Уявно проводимо перерізи через два стержні і відділяємо брус від нижньої опори. В відповідності до принципу початкових розмірів рівняння статки можна складати для недеформованої системи. Для того щоб виключити реакції в шарнірній опорі в якості рівняння рівноваги візьмемо

$$\sum m_O = 0, \quad N_2 a - N_1 \sin \beta 2a = 0, \quad N_2 = N_1 \quad (2.30)$$

Маємо одне незалежне рівняння статки і два невідомі внутрішніх зусилля. Задача є один раз статично невизначуваною. Необхідно скласти одне додаткове рівняння – рівняння сумісності переміщень. Розглянемо схему деформації системи при нагріванні тяг.

Покажемо деформації окремих стрижнів. Тоді відрізок  $AC = -\Delta l_1$ , а  $BB_1 = \Delta l_2$ . Оскільки ми прийняли, що обидва стержні розтягнуті, то відрізок  $AC$  дорівнює  $\Delta l_1$  зі знаком "мінус" оскільки за схемою деформації цей стержень стиснутий.

Із подібності трикутників  $OAA_1$  та  $OBB_1$  маємо

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{2a}{a}, \quad AA_1 = 2BB_1, \quad AA_1 = 2\Delta l_2. \quad (2.31)$$

Із прямокутного трикутника  $ACA_1$  випливає

$$AA_1 = \frac{CA}{\sin R} = -\frac{\Delta l_1}{\sin R}, \quad AA_1 = -2\Delta l_1 \quad (2.32)$$

Підставл

$$\Delta l_2 = -\Delta l_1 \quad (2.33)$$

Деформації  $\Delta l_1$  та  $\Delta l_2$  будуть викликані зусиллями  $N_1$  та  $N_2$  і підвищенням температури

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} + \alpha l_1 \Delta t, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} + \alpha l_2 \Delta t, \quad (2.34)$$

де  $l_1 = \frac{l}{\sin\beta} = 2l, \quad l_2 = l$  (2.35)

Підставляючи (2.34) в (2.33) з врахуванням (2.30) і (2.35) отримаємо

$$\frac{N_1 l}{EA_2} + l\alpha\Delta t = -\frac{N_1 2l}{2EA_2} - 2l\alpha\Delta t.$$

Після скорочень та перетворень отримаємо

$$N_1 = -\frac{3}{2}\alpha\Delta t EA_2 = -\frac{3}{2} \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -150 \text{ кН}$$

З умови (2.30) визначаємо

$$N_2 = N_1 = -150 \text{ кН.}$$

Від'ємні знаки в  $N_1$  і  $N_2$  означають, що стержні 1 і 2 в дійсності не розтягнуті як ми прийняли, а стиснуті. Тоді напруження в стержнях, викликані зміною температури

$$\sigma_{(1)}^t = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{15 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^{-3}} = -37,5 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{(2)}^t = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{15 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3}} = -75 \text{ МПа}$$

При розв'язанні задач, пов'язаних із визначенням температурних напружень в деяких випадках доводиться розв'язувати задачу з визначення граничної зміни температури  $\Delta t$ , при якій напруження в системі досягають граничної величини.

В такому випадку величину  $\Delta t$  визначають з умови

$$\left| \sigma_{\max}^t \right| \leq \sigma_m, \quad k\Delta t \leq \sigma_m, \quad \Delta t \leq \frac{\sigma_m}{k}$$

де  $k$  – числовий коефіцієнт,  $\sigma_m$  – границя текучості матеріалу.

## 3 НАПРУЖЕНИЙ СТАН В ТОЧЦІ

### 3.1 Поняття про напружений стан

Розглянемо напруження в будь-якій точці  $K$  тіла, що деформується (рисунок 3.1, а). У розділі 1 зазначалося, що величина повного напруження, яке діє на довільній площадці, проведеній через точку  $K$ , залежить від орієнтації площадки. Напруження, які діють на незліченній кількості по-різному

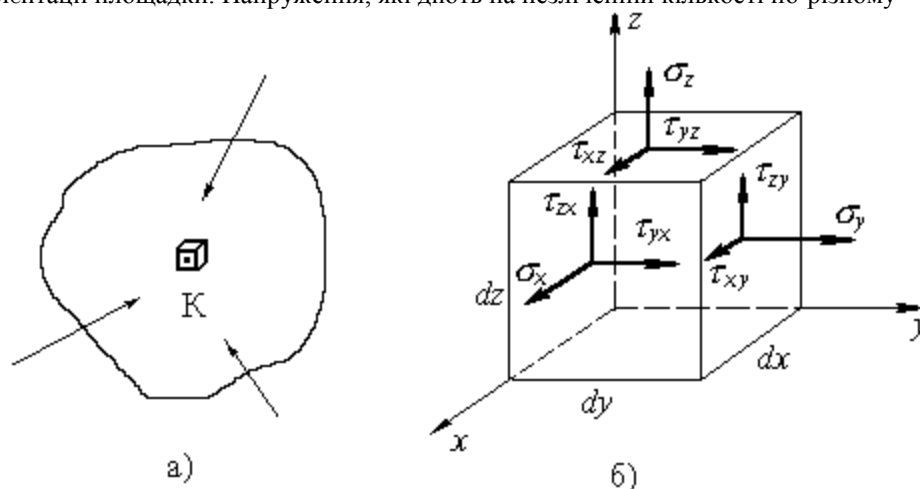


Рис. Рисунок 3.1

орієнтованих площадок, що проходять через розглядувану точку, характеризують напружений стан у точці. Метод вивчення напруженого стану в точці такий: вирізають елементарний паралелепіпед з ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рисунок 3.1, б) і визначають напруження на його гранях. Враховуючи малість розмірів паралелепіпеда і те, що всі його грані є площадками, які проходять через точку  $K$ , то напруження по гранях паралелепіпеда можуть розглядатися як напруження, що діють у точці  $K$ .

Повні напруження, які діють на кожній грані, розкладаємо на три складові – на нормальне напруження  $\sigma$  і дотичні  $\tau$ , як показано на рисунку 3.1, б. На невидимих гранях елемента виникають відповідно такі самі за величиною, але протилежного напрямку напруження. Перший індекс у дотичного напруження вказує напрямок напруження, а другий – напрямок нормалі до площини перерізу. Нормальні напруження будемо позначати індексом осі, перпендикулярної до площадки.

Оскільки вирізаний елемент знаходиться в рівновазі, то склавши суму моментів усіх сил відносно осі  $x$ , маємо

$$\sum M_x = \tau_{zy} dx \cdot dy \cdot dz - \tau_{yz} dx \cdot dy \cdot dz = 0,$$

звідки отримуємо  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ . З рівнянь моментів відносно осей  $y$  і  $z$  маємо

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} \tag{3.1}$$

Отже, у двох взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження перпендикулярні до спільного ребра і рівні за величиною. У цьому полягає закон парності дотичних напружень.

Таким чином, напружений стан в будь-якій точці напруженого тіла, яке деформується, визначається шістьма складовими  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy}$ , які діють на трьох взаємно перпендикулярних площадках. Знаючи ці складові, можна знайти напруження в будь-якій площадці, проведеній через дану точку.

В курсі теорії пружності доводиться, що через незліченну кількість площадок, які можна провести через довільну точку напруженого тіла, завжди можна знайти такі три взаємно перпендикулярні площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Такі площадки називаються головними площадками, а діючі на них нормальні напруження – головними напруженнями. Головні напруження позначають  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , при цьому повинна виконуватись умова  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  (за алгебраїчною величиною).

Якщо в будь-якій точці навантаженого тіла усі три напруження відрізняються від нуля, то такий напружений стан називають об'ємним або триосним. Якщо з трьох головних напружень одне дорівнює нулю, то такий напружений стан називається плоским або двоосним. Напружений стан, при якому два

головних (з трьох) напруження дорівнюють нулю, називається лінійним або одноосним. Прикладом лінійного напруженого стану є звичайний центральний розтяг (стиск) стержня.

Аналіз напруженого стану в точці необхідний в першу чергу для розрахунків на міцність в загальному випадку навантаження.

Напруження і деформації при лінійному напруженому стані розглянуті у розділі 2. Розглянемо напруження при плоскому напруженому стані.

### 3.2 Плоский напружений стан

Оскільки при плоскому напруженому стані дві грані елементарного паралелепіпеда вільні від напружень, то для спрощення міркувань сумістимо ці грані з площиною рисунку (рисунок 3.2).

Якщо напруження  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  і  $\tau_{yx}$  відомі, то можна визначити напруження на довільній площадці, повернутій на кут  $\alpha$  відносно площадки, на якій діє напруження  $\sigma_x$  (рисунок 3.2)

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha \quad (3.2)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha \quad (3.3)$$

Кут  $\alpha$  вважається додатним, якщо він відкладається проти руху годинникової стрілки. Розтягувальні нормальні напруження будемо

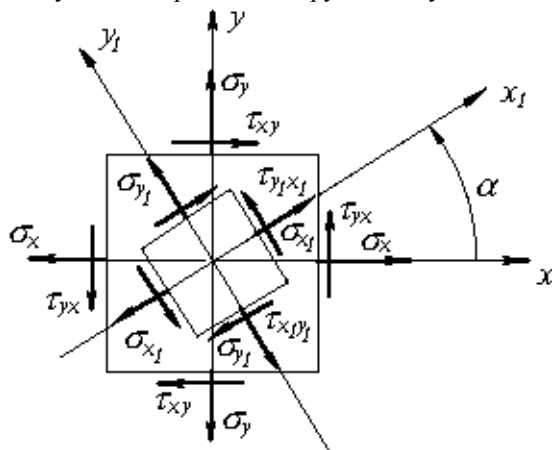


Рисунок 3.2

вважати додатними, а стискувальні – від’ємними. Знак дотичних напружень залежить від системи координат: якщо зовнішня нормаль до площадки збігається з напрямом відповідної осі координат, то на цій площадці  $\tau > 0$ , коли його напрям збігається з напрямом другої осі координат. Якщо зовнішня нормаль протилежна напрямку осі (невидимі грані на рисунку 3.1), то  $\tau > 0$  тоді, коли воно також протилежне своїй координатній осі( на рисунку 3.1 всі

$\tau$  і  $\sigma$  додатні). Якщо осі координат повернути на  $90^\circ$ , то дотичні напруження змінюють знак на протилежний.

На площадці повернутій на кут  $\alpha + 90^\circ$  по відношенню до площадки з напруженням  $\sigma_x$  (рисунок 3.2)

$$\sigma_{y_1} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha \quad (3.4)$$

із (3.2) і (3.4) випливає, що

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} \quad (3.5)$$

тобто сума нормальних напружень, що діють на двох взаємно перпендикулярних площадках величина стала.

### 3.3 Головні площадки і головні напруження

Знайдемо положення головних площадок. На головних площадках дотичні напруження дорівнюють нулю, тому прирівнявши вираз (3.3) до нуля, знайдемо

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0$$

звідки

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.6)$$

Формула (3.6) дає два значення кута  $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{4}$  і  $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ , які і визначають положення двох головних площадок. Якщо  $\sigma_x > \sigma_y$  і  $\tau_{yx} > 0$  то  $\alpha_0$  буде додатним (рисунок 3.3).

Головні напруження можна визначити за формулами (3.2) і (3.4) якщо замість  $\alpha$  підставити  $\alpha_0$  і  $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ , знайдені за формулою (3.6). Після нескладних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

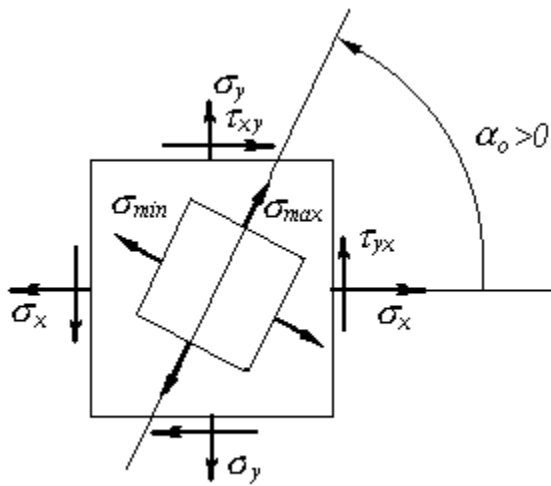


Рисунок 3.3

Норм:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (3.9)$$

Легко показати, що головні напруження мають екстремальні значення: одне з них є найбільшим з усіх нормальних напружень, які діють на численних площадках, що проходять через дану точку, а друге напруження – найменшим.

На площадках, нахилених під кутом  $45^\circ$  до головних, діють екстремальні дотичні напруження, які рівні

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (3.8)$$

### 3.4 Узагальнений закон Гука

Досліджуючи деформації і розглядаючи питання міцності при об'ємному та плоскому напружених станах, будемо в відповідності з основними гіпотезами і припущеннями вважати, що матеріал поводить згідно з законом Гука, а деформації малі. В розділі 2 було розглянуто залежність між напруженням та деформацією при простому розтяганні або стисканні, тобто при лінійному напруженому стані.

Зв'язок між відносними деформаціями і напруженнями при об'ємному напруженому стані має вигляд

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\quad (3.10)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $G$  – модуль зсуву.

Співвідношення (3.10) є аналітичним виразом узагальненого закону Гука для ізотропного тіла.

В головних напруженнях формули (3.10) мають вигляд

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3) \right], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \right].\end{aligned}\quad (3.11)$$

### 3.5 Потенціальна енергія деформації

Потенціальною енергією деформації називається енергія, яка накопичується в тілі при його пружній деформації. Коли під дією зовнішнього статичного навантаження тіло деформується, точки прикладання зовнішніх сил переміщуються і потенціальна енергія положення вантажу зменшується на величину, яка чисельно дорівнює роботі, виконаній зовнішніми силами. Енергія, витрачена зовнішніми силами, не зникає, а перетворюється, в основному, в потенціальну енергію деформації тіла. Решта, незначна частина розсіюється, головним чином, в вигляді тепла за рахнок різних процесів, що проходять в матеріалі при його деформації.

Величину потенціальної енергії деформації, що припадає на одиницю об'єму тіла, називають питомою потенціальною енергією деформації і визначають за формулою

$$u = \frac{P\Delta}{2Al} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}\quad (3.12)$$

Маючи на увазі, що  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ , одержимо для питомої потенціальної енергії деформації вираз

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}\quad (3.13)$$

Для загального випадку визначення питомої потенціальної енергії деформації при об'ємному напруженому стані, якщо задані головні напруження формула має вигляд

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]\quad (3.14)$$

При деформації елемента змінюється, як його об'єм, так і форма (із куба він перетворюється на паралелограм). В зв'язку з цим можна вважати, що повна питома потенційна енергія деформації

$$u = u_V + u_\Phi\quad (3.15)$$

де  $u_V$  – питома потенціальна енергія зміни об'єму, тобто енергія, яка накопичується за рахнок зміни об'єму;



$u_\phi$  – питома потенціальна енергія формозміни, тобто енергія, яка накопичується внаслідок зміни форми елемента.

Безпосередньо визначити  $u_\phi$  важко, тому спочатку визначимо  $u_V$ .

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (3.16)$$

Тепер, згідно формули (3.15),

$$u_\phi = u - u_V$$

Підставляючи сюди значення  $u$  і  $u_V$  із (3.14) і (3.16), після елементарних перетворень отримаємо, що

$$\begin{aligned} u_\phi &= \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Це і є шуканий вираз для питомої потенціальної енергії формозміни.

## 5 ЗСУВ

### 5.1 Основні поняття. Напруження при зсуві

Зсувом називають такий вид деформації, за якої у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає лише одна поперечна сила. Деформацію зсуву можна спостерігати, наприклад, під час різання ножицями металевих штаб або прутків (рисунок 5.1). Розглянемо брус площею поперечного перерізу  $A$ , перпендикулярно до осі якого прикладені дві однакові, але протилежно напрямлені сили  $P$ , лінії дії їх

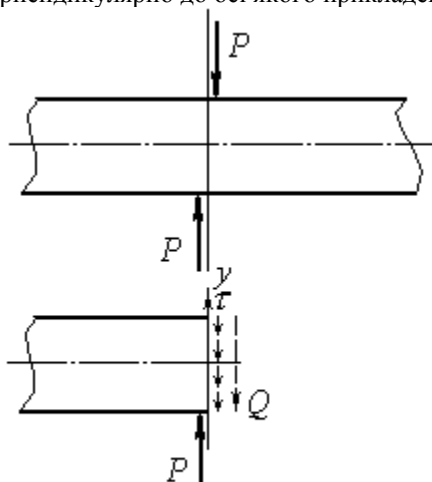


Рисунок 5.1

паралельні і проходять на відносно невеликій відстані одна від одної. Для визначення поперечної сили  $Q$  застосуємо метод перерізів (рисунок 5.1).

В усіх точках перерізу діятимуть розподілені сили, рівнодійну яких визначимо із умови рівноваги залишеної частини бруса

$$\sum Y = P - Q = 0,$$

звідси визначимо поперечну силу

$$Q = P.$$

Природно вважати, що при зсуві в поперечному перерізі бруса діють тільки дотичні напруження  $\tau$ . Припускаємо, що ці напруження розподілені по перерізу рівномірно і, отже, їх можна обчислити за формулою

$$\tau = \frac{Q}{A} \tag{5.1}$$

Отже, при зсуві форма перерізу на величину напруження не впливає.

### 5.2 Напруження і деформації при чистому зсуві

Чистим зсувом називається такий випадок плоского напруженого стану, при якому в околі досліджуваної точки можна виділити елементарний паралелепіпед на чотирьох бокових гранях якого будуть діяти тільки дотичні напруження (рисунок 5.2, а).

За формулами (3.6) і (3.7) знаходимо, що головні напруження при чистому зсуві дорівнюють

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau. \tag{5.2}$$

і діють на площадках, які складають кут  $45^\circ$  з площадками дії  $\tau$  (рис. 5.2,б).

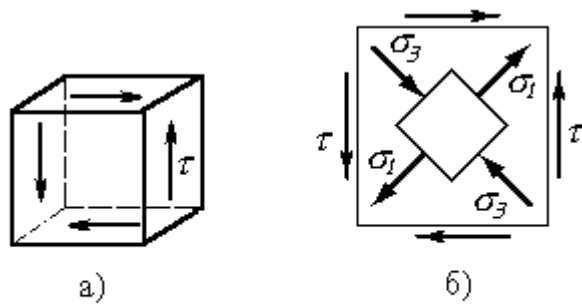


Рисунок 5.2

Деформацію при чистому зсуві характеризують такими величинами. Абсолютний зсув  $\delta$  – величина лінійного зміщення площадки зсуву (рисунок 5.3). Відносний зсув (або кут зсуву)

$$\gamma = \frac{\delta}{a} \quad (5.3)$$

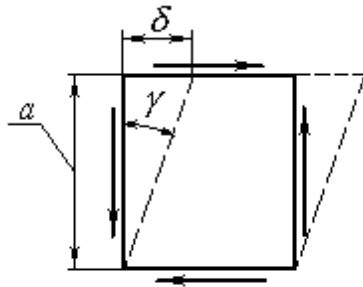


Рисунок 5.3

де  $a$  – відстань між площадками, на яких діє дотичне напруження  $\tau$  і відносний зсув яких визначається.

Відносний зсув  $\gamma$  виражають в радіанах. Напруження і деформації при зсуві зв'язані між собою залежністю, яку називають закон Гука для зсуву. Закон Гука для зсуву справедливий лише в певних межах навантаження і записується у вигляді рівності

$$\tau = G\gamma \quad (5.4)$$

Коефіцієнт пропорційності  $G$  характеризує жорсткість матеріалу (його здатність протидіяти пружним деформаціям) при зсуві. Його називають модулем зсуву або модулем пружності другого роду. Для сталі

$$G = 8,1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ Па} = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$$

Для ізотропних матеріалів між трьома пружними сталими  $E$ ,  $\mu$ , і  $G$  існує залежність

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (5.5)$$

При  $\mu = \frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$  отримаємо  $G = (0,375 \div 0,4)E$ .

Запишемо вираз для переміщення однієї грані відносно іншої (для абсолютного зсуву  $\delta$ ) при чистому зсуві. Позначивши площу грані  $A$ , рівнодійну силу зсуву  $Q = A\tau$  і відстань між гранями через  $a$  (рисунок 5.3), отримаємо

$$\delta = \frac{Qa}{GA} \quad (5.6)$$

Формула (5.6) виражає закон Гука при зсуві в абсолютних одиницях. Потенціальна енергія деформації елемента при чистому зсуві

$$U = \frac{\delta Q}{2} = \frac{Q^2 a}{2GA}, \quad (5.7)$$

а питома потенціальна енергія

$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (5.8)$$

### 5.3 Практичні розрахунки на зріз і зминання

На практиці багато деталей конструкцій зазнають деформацій, близьких до деформації зсуву, і в таких випадках їх розміри визначають з розрахунку на зсув (зріз). Розглянемо, наприклад, роботу заклепки, що скріплює два сталевих листи (рисунок 5.4).

Нехай на листи діють сили  $P$ , що намагаються зсунути їх один відносно одного. Цьому зміщенню перешкоджатиме стержень заклепки. На стержень заклепки передаються зусилля  $P$ , які намагаються зрізати заклепку по площині  $m-n$ .

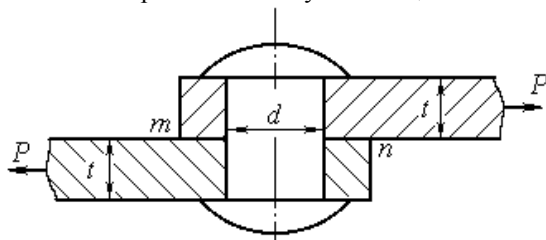


Рисунок 5.4

Вважають, що дотичні напруження розподіляються по перерізу заклепки рівномірно (згин заклепки нехтуємо). Тоді їх величина

$$\tau = \frac{P}{A}$$

де  $A = \frac{\pi d^2}{4}$  – площа поперечного перерізу заклепки.

Позначимо через  $[\tau]$  допустиме напруження матеріалу заклепки на зріз. Тоді умова міцності матиме вигляд

$$\tau = \frac{P}{A} \leq [\tau] \quad (5.6)$$

При статичному навантаженні звичайно беруть

$$[\tau] = (0,6 \dots 0,8)[\sigma],$$

де  $[\sigma]$  – допустиме напруження на розтяг для того самого матеріалу.

Надійність з'єднання, показаного на рисунку 5.4, визначається не лише міцністю заклепки проти перерізання. Тиск від листа на стержень заклепки передається по циліндричній поверхні. Цей тиск називається напруженням зминання  $\sigma_{зм}$ . При надмірно високому значенні  $\sigma_{зм}$  може відбутися зминання заклепки або листа. Внаслідок цього переріз заклепки або отвір у листі наберуть овальної форми. Для запобігання можливості зминання розрахунком встановлюють необхідну величину площі зминання  $A_{зм}$ .

Умову міцності на зминання записують у вигляді

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{A_{зм}} \leq [\sigma]_{зм}$$

де  $[\sigma]_{зм}$  – допустиме напруження зминання. Звичайно беруть

$$[\sigma]_{зм} = (1,8 \dots 2,0)[\sigma]$$

При контакті по циліндричній поверхні (рисунок 5.4) за розрахункову площу зминання умовно беруть площу проекції поверхні зминання на діаметральну площину. Для розглядуваного прикладу

$$A_{зм} = t \cdot d$$

Розглянемо, наприклад, розрахунок з'єднання стропильної ноги з стропильною затяжкою (рисунок 5.5).

Довжину частини затяжки визначимо з умови (5.6)

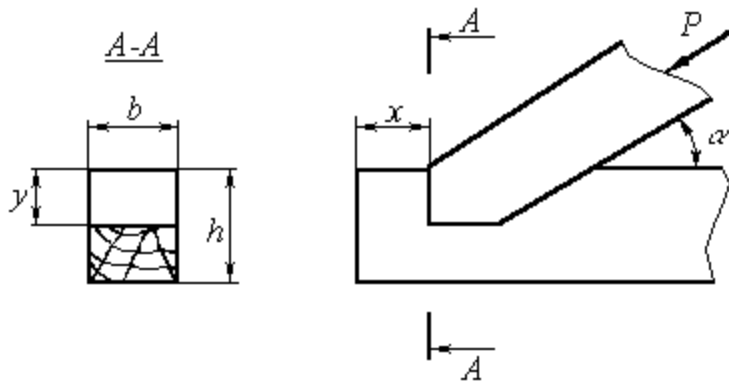


Рисунок 5.5

$$\tau = \frac{P \cos \alpha}{b \cdot x} \leq [\tau]$$

звідси

$$x \geq \frac{P \cos \alpha}{b \cdot [\tau]}$$

Необхідну площу змінання вирубки знайдемо з умови міцності (5.7)

$$\sigma_{з.м} = \frac{P \cos \alpha}{b \cdot y} \leq [\sigma]_{з.м}$$

звідси глибина вирубки

$$y \geq \frac{P \cos \alpha}{b \cdot [\sigma]_{з.м}}$$

## 6 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Опір стержня різним видам деформації залежить не тільки від його матеріалу і площі поперечного перерізу, а і від форми поперечного перерізу, і його розміщення по відношенню до діючих навантажень. Досі вивчалися деформації, у яких напруження залежали тільки від площі поперечного перерізу. Для вивчення деформацій згину і кручення потрібно знати й інші, більш складні геометричні характеристики плоских перерізів

### 6.1 Статичний момент площі. Центр ваги перерізу

Статичним моментом  $S_z$  або  $S_y$  площі перерізу відносно осі  $z$  або  $y$ , які лежать у площині перерізу, називаються інтеграли виду

$$S_z = \int_A y \cdot dA, \quad S_y = \int_A z \cdot dA \quad (6.1)$$

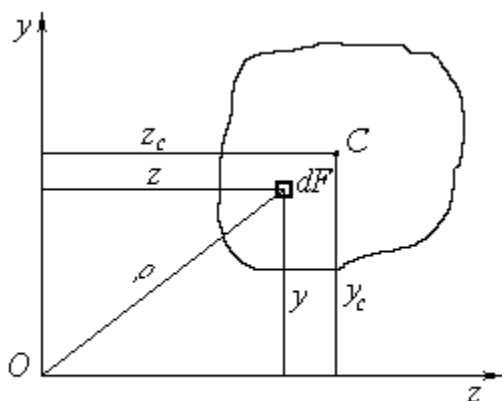


Рисунок 6.1

де  $z$  та  $y$  – відстані від центра елементарної площадки до осей  $Oz$  та  $Oy$ .

У більшості практичних (інженерних) задач можна інтегрування замінити сумою, розділивши переріз на частини, площі і положення центрів ваги яких відомі, наприклад, переріз на рис. 6.2 можна розділити на окремі прямокутники. Тоді замість (6.1) можна записати

$$S_z = \sum_{i=1}^n A_i y_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i z_i, \quad (6.2)$$

де  $n$  – кількість окремих частин перерізу,

$A_i$  – площа частини перерізу,

$z_i, y_i$  – відстані від центра ваги цієї площі до осей  $Oz$  та  $Oy$ .

Положення центра ваги перерізу  $C$  відносно будь-яких осей  $z$  та  $y$  (рисунки 6.1 і 6.2) визначається формулами

$$z_C = \frac{S_y}{A}, \quad y_C = \frac{S_z}{A}, \quad (6.3)$$

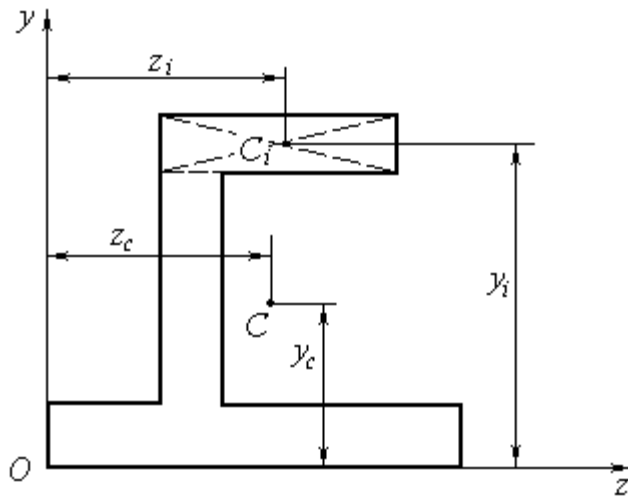


Рисунок 6.2

## 6.2 Моменти інерції перерізу

Осьовими моментами інерції  $I_z$  та  $I_y$  перерізу відносно будь-яких осей  $z$  та  $y$ , що лежать у площині перерізу (рисунок 6.1) називають інтеграли виду

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad (6.4)$$

де  $y$  та  $z$  – відстані від елементарної площадки  $\Delta A$  до осей  $Oz$  та  $Oy$ .

Відцентровим моментом інерції  $I_{zy}$  перерізу відносно осей  $Oz$  та  $Oy$ , які лежать у площині перерізу, називається інтеграл виду

$$I_{zy} = \int_A zy \cdot dA. \quad (6.5)$$

Інтеграл від добутків елементарних площадок на квадрати їх відстаней до даної точки (полюса)  $O$  (рисунок 6.1) називається полярним моментом інерції

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (6.6)$$

Осьові і полярний моменти інерції завжди додатні, відцентровий момент інерції може бути додатним, від'ємним і рівним нулю.

Якщо полюс  $O$  збігається з початком координатних осей  $z, y$ , то

$$I_p = I_z + I_y \quad (6.7)$$

Із (6.7) випливає, що при повороті осей координат сума осьових

де  $A$  – площа перерізу,

$S_z$  та  $S_y$  – статичні моменти площі перерізу відносно осей  $z$  та  $y$ .

Статичний момент площі може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Статичний момент відносно осі, яка проходить через центр ваги фігури (центральної осі) дорівнює нулю.

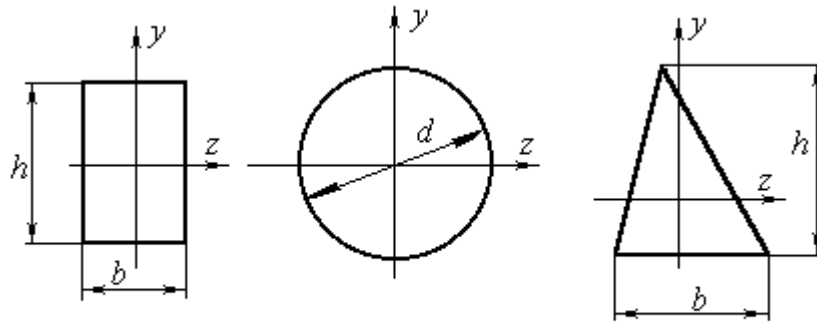


Рис. 6.3. Рисунок 6.3

моментів інерції залишається незмінною.

За формулами (6.4 – 6.6) легко підрахувати моменти інерції для перерізів, які часто зустрічаються на практиці. Наприклад, для прямокутника (рисунок 6.3)

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}. \quad (6.8)$$

для круга

$$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}. \quad (6.9)$$

для трикутника відносно центральної осі паралельної основи

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad (6.10)$$

Полярний момент інерції круга відносно полюса, розміщеного в центрі ваги

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \quad (6.11)$$

### 6.3 Формули переходу до паралельних або повернутих осей

Нехай система координат  $z_c y_c$  проходить через центр ваги  $C$  перерізу (рисунок 6.4), а друга система  $yz$ , що має початок у точці  $O$ , паралельна їй. Відстані між осями цих систем позначимо через  $a$  і  $b$ . Якщо відомі моменти інерції площі  $A$  відносно центральних осей  $z_c$  і  $y_c$  –  $I_{z_c}, I_{y_c}$  і  $I_{z_c y_c}$ , то відносно осей  $z, y$ , паралельних центральним осям (рисунок 6.4) моменти інерції знаходять за формулами

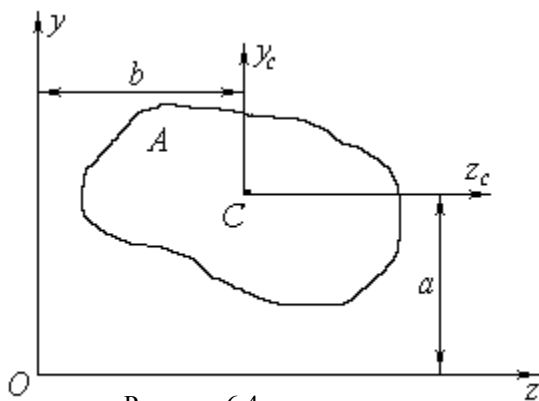


Рисунок 6.4

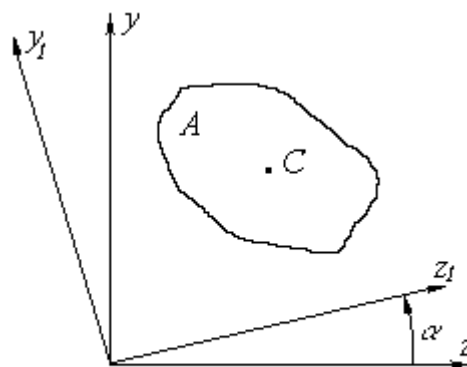


Рисунок 6.5



$$\begin{aligned}
I_z &= I_{z_c} + a^2 A, \\
I_y &= I_{y_c} + b^2 A, \\
I_{zy} &= I_{z_c y_c} + abA.
\end{aligned}
\tag{6.12}$$

При повороті координатних осей на кут  $\alpha$  (рисунок 6.5) залежність між моментами інерції така:

$$\begin{aligned}
I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha, \\
I_{y_1} &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha.
\end{aligned}
\tag{6.13}$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha.
\tag{6.14}$$

Кут  $\alpha > 0$  при повороті осей проти стрілки годинника.

Момент інерції складної фігури (рисунок 6.2) дорівнює сумі моментів інерції простих фігур

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i}; \quad I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i}; \quad I_{zy} = \sum_{i=1}^n I_{z_i y_i}.
\tag{6.15}$$

де  $n$  – кількість окремих частин перерізу,

$I_{z_i}, I_{y_i}, I_{z_i y_i}$  – момент інерції  $i$ -тої частини відносно довільно вибраних осей  $z, y$ . Тобто, для кожної частини вони взяті відносно одних і тих же осей.

#### 6.4 Головні осі інерції та головні моменти інерції перерізу

Головними називають осі, відносно яких відцентровий момент інерції перерізу дорівнює нулю. Найбільший практичний інтерес мають головні центральні осі, на відміну від інших позначимо їх через  $u$  і  $v$

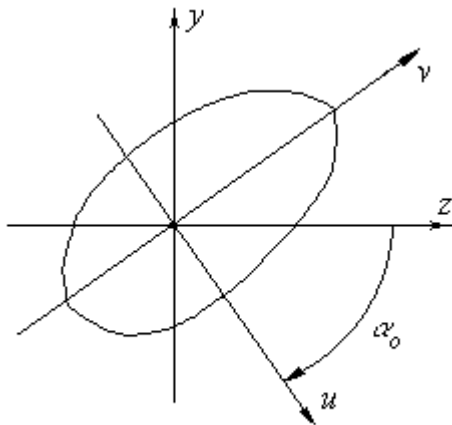


Рисунок 6.6

(рисунок 6.6). В розрахункових формулах їх часто позначають також через  $y$  і  $z$ . Для визначення положення головних центральних осей  $u$  та  $v$  використаємо формулу (6.14) переходу до повернутих осей (у даному випадку до головних осей  $uv$ ), підпорядкувавши її умові  $I_{uv} = 0$ . Тоді для знаходження кута  $\alpha_0$  (рисунок 6.6), що визначає положення головних осей відносно

будь-яких допоміжних центральних осей  $zy$ , отримаємо

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}.
\tag{6.16}$$

Формула дає два значення кута  $\alpha_0$ , що відрізняються на  $\frac{\pi}{2}$  і визначають положення двох взаємно перпендикулярних головних осей інерції.

Моменти інерції відносно головних осей називаються головними моментами інерції. Головні моменти інерції мають екстремальні значення, тобто один має найбільше, а другий найменше значення із всіх отриманих при повороті осей координат. Сума осьових моментів інерції при повороті осей координат величина стала

$$I_z + I_y = I_{z_1} + I_{y_1} = I_u + I_v \quad (6.17)$$

Головні моменти інерції позначимо  $I_u$ ,  $I_v$  або  $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$ . Їх можна підрахувати за формулами (6.13) з врахуванням того, що  $\alpha = \alpha_0$ , або

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{I_z - I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2} \\ I_{\min} &= \frac{I_z - I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Із залежності (6.17) випливає, що при повороті допоміжних осей  $z_u$  до збігу з головними осями  $uv$  більший з моментів інерції відносно допоміжних осей повинен збільшитися і досягти величини  $I_{\max}$ , тоді як менший повинен зменшитися на ту саму величину й досягти  $I_{\min}$ . Отже віссю максимального моменту завжди буде вісь, суміжна з тією допоміжною віссю ( $z$  або  $y$ ), відносно якої момент інерції більший. Якщо, наприклад,  $I_z > I_y$ , то вісь  $u$ , що з віссю  $z$  становить гострий кут (рисунок 6.5), буде віссю  $I_{\max}$ .

Потрібно відмітити, що отримані за формулою (6.16) значення  $\alpha_0$  потрібно відкладати проти стрілки годинника, якщо вони додатні, і за стрілкою годинника, якщо вони від'ємні.

### 6.5 Радіуси інерції. Моменти опору

Радіусом інерції перерізу називають величину виду

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (6.19)$$

Головні радіуси інерції перерізу отримаємо, якщо у формулу (6.19) підставимо головні моменти інерції

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}. \quad (6.20)$$

Осьовим моментом опору називається частка від ділення головного моменту інерції на відстань від осі до найбільш віддаленої від неї точки перерізу

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \quad (6.21)$$

де  $I_z, I_y$  – головні моменти інерції.

Частка від ділення полярного моменту інерції на відстань від центру до найбільш віддаленої точки перерізу називається полярним моментом опору

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (6.22)$$

Для прямокутника

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}, \quad W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}. \quad (6.23)$$

Для круга

$$W_z = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (6.24)$$

Для перерізів у вигляді прокатних профілів (кутиків, швелерів, двотаврів) розглянуті вище геометричні характеристики наведені у таблицях сортаменту.

## 7 КРУЧЕННЯ

### 7.1 Напруження і деформації при крученні стрижнів круглого поперечного перерізу

Деформація кручення бруса має місце тоді, коли на них діють пари сил, розташованих у площинах, перпендикулярних до осі бруса.

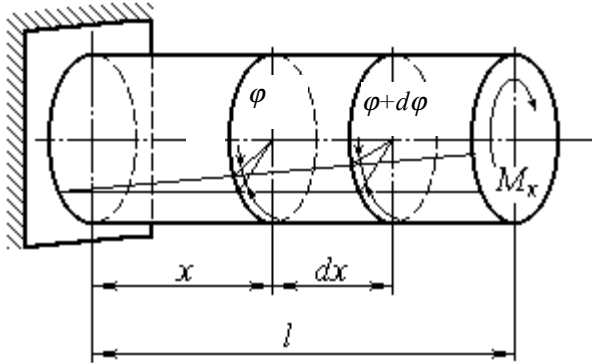


Рисунок 7.1

Деформація при крученні виявляється у взаємному повороті перерізів бруса і вимірюється у кутових одиницях (радіанах). Кут повороту двох крайніх перерізів, розташованих на відстані  $l$  один від одного, називають повним кутом закручування  $\varphi$ , або просто  $\varphi$  (рисунок 7.1). Кут закручування, віднесений до одиниці довжини бруса,

називається відносним кутом закручування

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (7.1)$$

Зовнішній момент, що прикладений до будь-якого перерізу бруса і викликає деформацію бруса, називають скручувальним моментом  $M_x$ , а внутрішній силовий фактор називається крутним моментом  $M_x$ .

У розглядуваному брусі (рисунок 7.1) в будь-якому поперечному перерізі крутний момент  $M_x$  дорівнює скручувальному моменту  $M_x$ . Початкова твірна після деформації набуде вигляду  $E, A, B, C$ . На відстані  $x$  від закріпленого кінця бруса виділимо елемент завдовжки  $dx$  (рисунок 7.1, 7.2). Як видно із рисунку 7.2

$$\gamma_{\max} = \frac{r d\varphi}{dx}, \quad (7.2)$$

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dx}, \quad (7.3)$$

де  $\rho$  – відстань від точки перерізу до осі бруса,  $r = d/2$  – радіус перерізу,  $d$  – діаметр бруса,  $\gamma_{\max}$ ,  $\gamma$  – відносний зсув на поверхні і на віддалі  $\rho$  від осі бруса, відповідно.

Використовуючи закон Гука при зсуві (5.4), для дотичних напружень при крученні отримаємо вираз

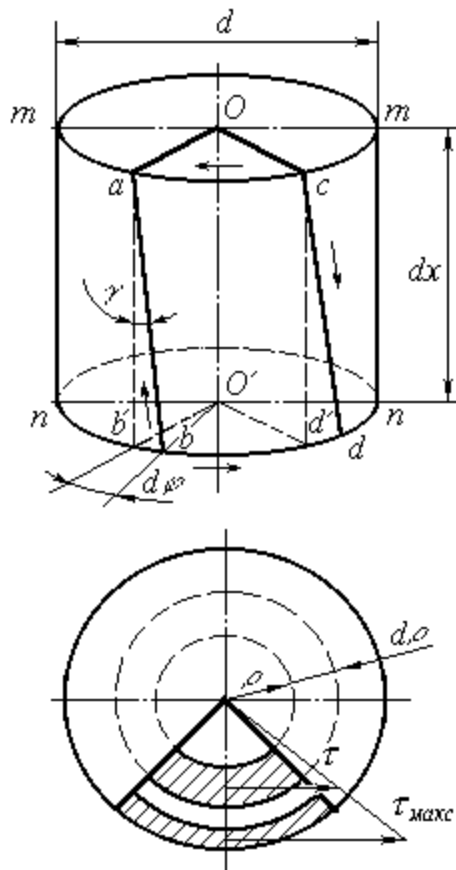


Рисунок 7.2

$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

тому (7.6) запишемо у вигляді

$$\theta = \frac{M_x}{G \cdot I_p} \quad (7.7)$$

Підставивши це значення  $\theta$  у вираз (7.4) матимемо

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho \quad (7.8)$$

Для круглого поперечного перерізу  $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$

Користуючись цією формулою, легко визначити величину напружень в будь-якій точці перерізу, розташованій на відстані  $\rho$  від осі бруса. Максимальні напруження діють у точках, які розташовані на контурі поперечного перерізу бруса (рисунок 7.2), для яких  $\rho_{\max} = r$ . Величина максимальних напружень

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{I_p} r$$

Замінивши  $I_p/r$  полярним моментом опору (див.(6.21)) отримаємо  
Для круглого поперечного перерізу

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \quad (7.9)$$

З формули (7.8) видно, що напруження  $\tau$  змінюються прямо

$$\tau = \gamma \cdot G = \rho \frac{d\phi}{dx} G = \rho \cdot G \cdot \theta \quad (7.4)$$

У площині поперечного перерізу на відстані  $\rho$  від осі бруса виділимо елементарну площадку  $dA$ . Зусилля, що припадає на цю площадку, дорівнює  $\tau \cdot dA$ , а момент цього зусилля відносно осі бруса дорівнює  $\tau \cdot \rho \cdot dA$ . Склавши суму зусиль отримаємо величину крутного моменту (1.13)

$$M_x = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA \quad (7.5)$$

Підставивши значення  $\tau$  із (7.4), матимемо

$$M_x = \int_A \rho^2 \cdot G \cdot \theta \cdot dA = G \cdot \theta \int_A \rho^2 dA \quad (7.6)$$

Як показано в розділі 6 (формула 6.6)

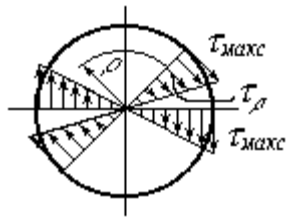


Рисунок 7.3

пропорційно відстані  $\rho$  від осі бруса. Розподіл дотичних напружень по перерізу бруса наведено на рисунку 7.3. Згідно з законом парності дотичних напружень, такі самі напруження діятимуть і в повздовжніх перерізах бруса (рисунку 7.3).

Таким чином при крученні бруса виникає плоский напружений стан – чистий зсув (рисунку)

7.3). Для елемента біля поверхні бруса взаємне положення головних площадок і площадок, на яких діють максимальні дотичні напруження, показано на рисунку 7.3.

Характер руйнування при крученні визначається напруженим станом і особливостями опору матеріалу бруса лінійним і кутовим деформаціям. Так, стержні із пластичних матеріалів будуть руйнуватися по поперечному перерізу від дотичних напружень. Дерев'яний стержень буде руйнуватися по повздовжніх перерізах, оскільки дерево погано чинить опір зсуву вздовж волокон. Стержень із крихкого матеріалу буде руйнуватися по площадках, розміщених під кутом  $45^\circ$  до осі, тобто перпендикулярних головному напруженню  $\sigma_{\max}$ .

Кут закручування ділянки стержня довжиною  $l$  знайдемо за формулою (7.7) з врахуванням (7.1)

$$\Phi = \int_0^l \frac{M_x dx}{I_p G} \quad (7.10)$$

Якщо крутний момент  $M_x$  і жорсткість перерізу  $GI_p$  величини сталі на ділянці довжиною  $l$ , то

$$\Phi = \frac{M_x l}{I_p G} \quad (7.11)$$

Кут закручування стрижня, який має  $n$  ділянок

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{xi} l_i}{I_p G} \quad (7.12)$$

## 7.2 Епюри крутних моментів

Для розрахунку бруса на кручення (формули 7.7–7.12) необхідно знати величину крутного моменту  $M_x$  в будь-якому поперечному перерізі бруса. Закон зміни крутних моментів по довжині бруса  $M_x(x)$  називають епюрою крутних моментів. Епюра дає наочне зображення розподілу крутних моментів вздовж осі бруса. Величину  $M_x$  знаходять із умови рівноваги будь-якої частини бруса, розміщеної з одного боку від перерізу. Із рівняння рівноваги (1.7) випливає, що крутний момент у будь-якому поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, прикладених до бруса справа або зліва від перерізу.

Епюри крутних моментів дають змогу визначити небезпечні перерізи, зокрема, якщо брус має сталий поперечний переріз, то небезпечними будуть перерізи на ділянці, де виникає найбільший крутний момент.

Крутний момент вважають додатним, якщо результувальний момент зовнішніх пар, прикладених до розглядуваної частини бруса буде

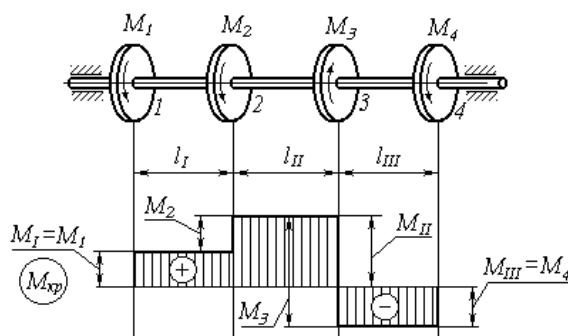


Рисунок 7.4

напрямленим за стрілкою годинника, коли дивитися в торець перерізу, і навпаки. Користуючись принципом пом'якшених граничних умов, вважатимемо, що у поперечному перерізі, де прикладений скручувальний момент, значення крутного моменту змінюється стрибкоподібно.

При побудові епюри крутних моментів їх величини відкладають

перпендикулярно прямій, паралельній осі бруса (базі епюри). На рисунку 7.4 приведений приклад побудови епюри крутних моментів.

### 7.3 Розрахунки на міцність і жорсткість

Для нормальної роботи стержнів на кручення необхідно задовольнити умову міцності

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau] \quad (7.13)$$

умову жорсткості

$$\theta_{\max} = \frac{M_x}{I_p G} \leq [\theta] \quad (7.14)$$

де  $[\tau]$  – допустиме напруження кручення, яке вибирають залежно від допустимого напруження на розтяг, умов роботи конструкції та інше. Наприклад:

для сталей

$$[\tau] = (0,55 \dots 0,60) [\sigma]_p,$$

для чавунів

$$[\tau] = (1,0 \dots 1,2) [\sigma]_p.$$

В формулі (7.14)  $[\theta]$  – допустимий кут закручування, нормований технічними умовами.

Для вала суцільного поперечного перерізу

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{M_x}{[\tau]}, \text{ звідки}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_x}{\pi [\tau]}}.$$

Для трубчастого вала

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{M_x}{[\tau]}, \text{ звідки}$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_x}{\pi [\tau] (1 - \alpha^4)}}$$

де  $\alpha = d/D$ .

При розрахунках на жорсткість, враховуючи (7.14) і значення  $I_p$  для суцільного вала

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32},$$

для трубчастого вала  $I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$

знаходимо:

для суцільного вала

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_x}{G \pi [\theta]}}$$

для трубчастого вала

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_x}{G\pi[\theta](1-\alpha^4)}}$$

Таким чином діаметр вала визначають з умови міцності (7.13) та умови жорсткості (7.14). За кінцевий розмір беруть більший діаметр.

Часто скручувальні моменти визначають за потужністю  $N$ , що передається на вал або знімається з нього і за його кутовою швидкістю  $\omega$ . У такому випадку скручувальний момент визначають за формулою

$$M_k = \frac{N}{\omega}. \quad (7.15)$$

Якщо  $N$  взяти в ватах, а  $\omega$  – у радіанах за секунду, то  $M_k$  буде в Нм.

#### 7.4 Напруження і деформації в стержнях некруглого поперечного перерізу

В теорії кручення брусків некруглого поперечного перерізу гіпотеза плоских перерізів не виконується, оскільки в процесі деформації

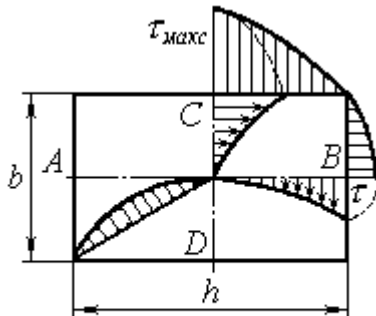


Рисунок 7.5

поперечні перерізи таких брусків не залишаються плоскими і викривляються, приймаючи форму криволінійної поверхні. В зв'язку з цим задача з визначення напружень і деформацій не може бути розв'язана методами опору матеріалів.

На рисунку 7.5 показана еюра розподілу напружень по прямокутному перерізі, при крученні, отримана методами теорії пружності. Як видно із рисунку 7.5 найбільші напруження

будуть в точках  $A, A_1$ , розміщених по середині довгих сторін. Їх можна визначити за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_k}, \quad (7.16)$$

де

$$W_k = \alpha b^2 h. \quad (7.17)$$

В точках  $B$  і  $B_1$  напруження

$$\tau_B = \gamma \cdot \tau_{\max}. \quad (7.18)$$

Кут закручування стержня

$$\varphi = \frac{M_x l}{I_k G}, \quad (7.19)$$

де  $I_k = \beta h^3 b. \quad (7.20)$

Коефіцієнти  $\alpha, \beta, \gamma$  залежать від відношення  $h/b$  і приводяться в таблиці

$h/b$	1.0	1.5	1.75	2.0	2.5	3	4	6	8	10
-------	-----	-----	------	-----	-----	---	---	---	---	----

$\alpha$	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313
$\beta$	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313
$\gamma$	1	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742

$I_k, W_k$  – називають моментом інерції і моментом опору при крученні.

Запишемо умови міцності та жорсткості для прямокутного перерізу:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2} \leq [\tau];$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{\beta hb^3 G} \leq [\theta]$$

Якщо має місце кручення стержня складного перерізу, який можна розбити на частини із прямокутних елементів, то для нього

$$I_k = I_{k_1} + I_{k_2} + I_{k_3} + \dots + I_{k_n} = \sum I_{k_i},$$

де  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  – номери елементарних частин, на які розбитий переріз.

Оскільки кут закручування для всього перерізу і всіх його частин однаковий, то крутний момент розподіляється між окремими частинами перерізу пропорційно їх жорсткостям. Найбільшого значення напруження  $\tau$  досягає для того елемента, в якого  $I_{k_i} / W_{k_i}$  буде максимальне

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_{кр}} \left( \frac{I_{k_i}}{W_{k_i}} \right) = \frac{M_{кр}}{W_k},$$

де  $W_k = \frac{I_k}{\left( \frac{M_{кр}}{W_{k_i}} \right)_{\max}}$

### 7.5 Статично невизначувані задачі при крученні

Якщо крутні моменти, що виникають у поперечних перерізах бруса, не можуть бути визначені за допомогою лише рівнянь статyki, то такі задачі називають статично невизначуваними.

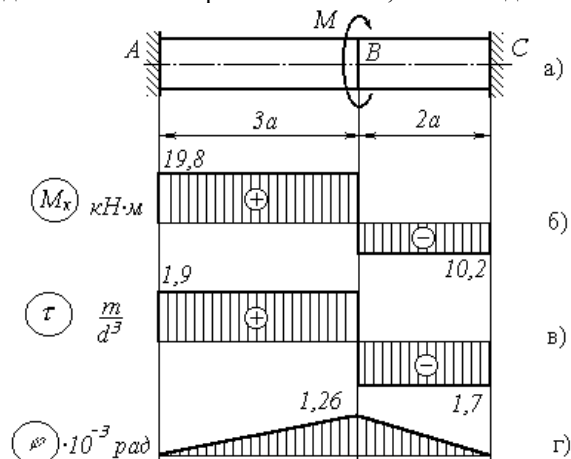


Рисунок 7.6

Щоб отримати реактивні моменти  $M_A$  і  $M_C$ . Оскільки для цього випадку можна скласти тільки одне рівняння статyki

$$M_A + M_C = M, \tag{7.21}$$

то задача є один раз статично невизначуваною. Необхідне для розв'язування ще одне рівняння отримуємо із умови, що кут закручування стержня в перерізі

План розв'язування статично невизначуваних задач при крученні розглянемо на такому прикладі. Визначити розміри поперечних перерізів стержня (рисунок 7.6), який закріплено з обох боків і скручується парою сил з моментом  $m=30$  кНм. На ділянці  $AB$  переріз стержня прямокутний,  $h/b=1.5$ ; на ділянці  $BC$  – круглий, причому  $d=b$ . Допустиме напруження  $[\tau]=6$  МПа. Побудувати епору кутів закручування, якщо  $G=8 \cdot 10^4$  МПа,  $a=0.5$  м.



$$\varphi_C = 0, \quad (7.22)$$

оскільки стержень в цьому перерізі закріплений.

Використовуючи формулу (7.12) запишемо (7.20) у вигляді

$$\varphi_C = \varphi_{B-A} + \varphi_{C-B} = \frac{M_x^{AB} 3a}{I_p G} + \frac{M_x^{BC} 2a}{I_p G} = 0, \quad (7.23)$$

Тепер (7.23) запишемо у вигляді

$$\frac{3M_A}{0,294 d^4} + \frac{2(M_A - M)}{0,1 d^4} = 0,$$

або

$$10,2M_A + 20M_A - 20M = 0,$$

звідки

$$M_A = 0,66M.$$

а із (7.21) знайдемо

$$M_C = 0,34M.$$

За отриманими результатами побудована епюра крутних моментів  $M_x$  (рисунок 7.6, а)  
Максимальні напруження:  
на ділянці  $AB$

$$\tau_{\max}^{AB} = \frac{M_x^{AB}}{W_\kappa} = \frac{0,66M}{\alpha b^2 h} = \frac{0,66M}{0,231 \cdot 1,5b^3} = 1,9 \frac{M}{d^3},$$

на ділянці  $BC$

$$\tau_{\max}^{BC} = \frac{M_x^{BC}}{W_p} = \frac{0,34M \cdot 16}{\pi d^3} = 1,7 \frac{M}{d^3}.$$

Епюра напружень показана на рисунку 7.6, в. Найбільші напруження, як бачимо, мають місце в точках, які знаходяться по середині довгих сторін прямокутного перерізу (ділянка  $AB$ ). Для них необхідно задовольнити умову міцності

$$\tau_{\max} = 1,9 \frac{M}{d^3} \leq [\tau],$$

звідки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{1,9M}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{1,9 \cdot 30 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^6}} = 0,0983 \text{ м.}$$

Приймаємо  $d=100$  мм,  $b=100$  мм,  $h=150$  мм.

Кут повороту перерізу  $B$  відносно закріпленого перерізу  $A$

$$\varphi_{B-A} 10^{-3} = \frac{M_x^{AB} 3a}{I_p G} = \frac{0,66M \cdot 3a}{G \cdot 0,294d^4} = \frac{0,66 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,294 \cdot 0,1^4} = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Епюра кутів закручування показана на рисунку 7.6, г.

# 8 ЗГИН

## 8.1 Основні поняття

Розглянемо призматичний брус з прямою віссю, на який діє ряд зрівноважених сил, розташованих в одній площині, що проходить через вісь бруса (рисунок 8.1). У такому випадку брус зазнаватиме деформації згину. Площину, в якій розташовані сили, що викликають згинання бруса, називають площиною дії згинальних сил. Площину, що проходить через

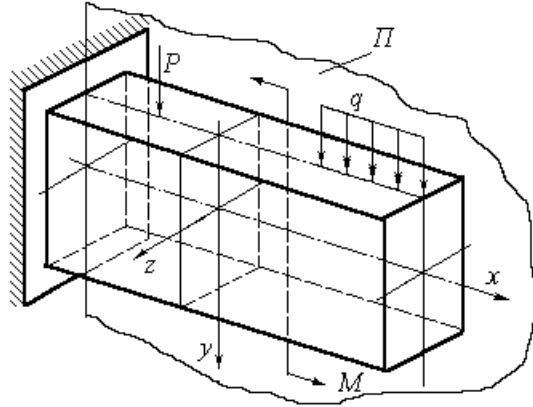


Рисунок 8.1

вісь бруса і головні осі інерції поперечних перерізів, називають головною площиною бруса.

Якщо площина дії згинальних сил збігається з головною площиною, то і згин буде відбуватися в цій же площині. Такий згин називається прямим або плоским згином.

Будь-який брус з прямолінійною віссю, що зазнає.

деформації згину, називають балкою. Балка, жорстко закріплена одним кінцем, називається консоллю (рисунок 8.2, а). На рисунку 8.2, б зображено балку на трьох опорах, навантажену зосередженими силами

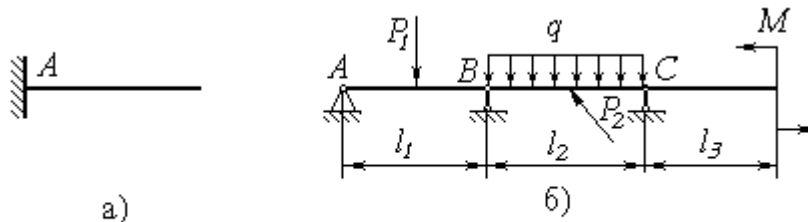


Рис. 8.2 Рисунок 8.2

$P_1$ ,  $P_2$ , рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q$  і парою сил  $M$ . Відстань між двома суміжними опорами балок називають прогоном. Кінець балки, який звисає називають консольним кінцем.

## 8.2 Поперечна сила і згинальний момент

При дослідженні напружень, що виникають у балці при згині, будемо користуватися методом перерізів. Перерізаємо балку площиною перпендикулярною до її осі і розглядаємо рівновагу однієї частини, яка перебуває під дією зовнішніх навантажень і невідомих внутрішніх сил, певним чином розподілених по зробленому перерізі. Внутрішні сили повинні зрівноважувати всі зовнішні навантаження (включаючи реакції опор), що діють на відсічену частину балки.

Розглянемо балку на двох опорах, навантажену вертикальним навантаженням і парою сил  $M$  (рисунок 8.3, а). Припустимо, що балка розрізана на дві частини перерізом  $m-n$ , взятим на відстані  $x$  від лівої опори (рисунок 8.3, б). Із статки відомо, що система паралельних сил  $R_A$

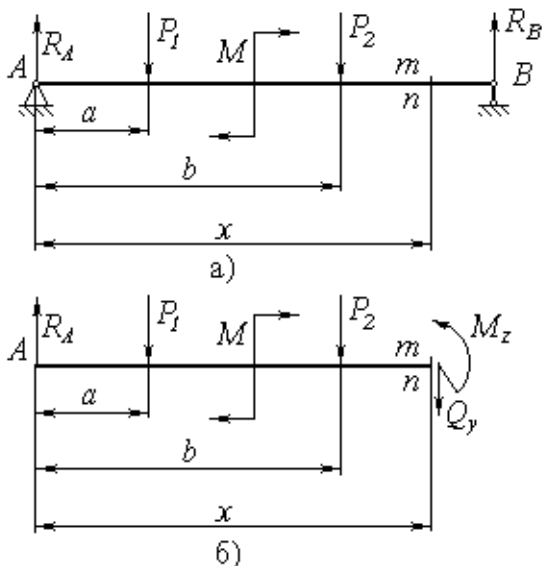


Рисунок 8.3

,  $P_1$ ,  $P_2$  і пара сил  $M$ , які діють на ліву частину балки, можуть бути зведені до однієї вертикальної сили і пари сил. Отже, внутрішні сили, що діють в перерізі  $m-n$ , також можна звести до вертикальної рівнодійної і до пари сил. Позначимо величину рівнодійної внутрішніх сил через  $Q_y$ , а момент внутрішніх сил відносно осі  $z$ , що проходить через центр ваги перерізу  $m-n$  і перпендикулярна до площини рисунка, через  $M_z$ .

Сила  $Q_y$  називається поперечною

силою, а момент  $M_z$  – згинальним моментом у довільному перерізі балки, взятому на відстані  $x$  від початку координат. Поперечна сила і згинальний момент є внутрішніми силовими факторами в поперечних перерізах балки при згині.

Для визначення величини поперечної сили запишемо рівняння рівноваги для всіх сил, які діють на ліву частину балки

$$R_A - P_1 - P_2 - Q_y = 0,$$

звідки

$$Q_y = R_A - P_1 - P_2. \quad (8.1)$$

Для визначення величини згинального моменту, складемо рівняння моментів усіх сил, що діють на ліву частину балки, відносно осі  $z$ , яка проходить через центр перерізу  $m-n$

$$-R_A x + P_1(x - a) + P_2(x - b) + M - M_z = 0,$$

звідки

$$M_z = R_A x - P_1(x - a) - P_2(x - b) - M. \quad (8.2)$$

Поперечна сила і згинальний момент, знайдені з розгляду рівноваги правої частини балки, будуть мати ті самі значення, але напрямок їх буде протилежним. Це впливає з того, що всі сили, включаючи реакції, є системою сил, що перебувають у рівновазі.

Для того, щоб поперечна сила і згинальний момент, визначені з розгляду лівої та правої частин балки, були однакового знаку, слід дотримуватися певного правила знаків.

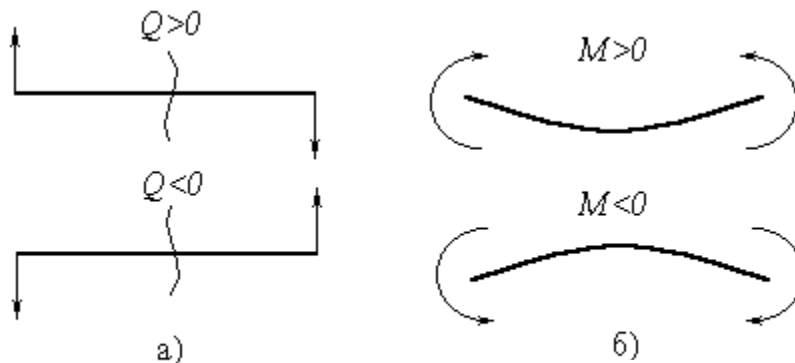


Рисунок 8.4  
Ри

Поперечну силу будемо вважати додатною, якщо вона намагається повернути вирізаний елемент за стрілкою годинника (рисунок 8.4, а). Згинальний момент будемо вважати додатним, якщо він вигинає балку опуклістю вниз (стиснуті верхні волокна) (рисунок 8.4, б).

### 8.3 Залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження, поперечною силою і згинальним моментом

Установимо залежність між інтенсивністю розподіленого навантаження, поперечною силою і згинальним моментом. Для цього розглянемо балку навантажену довільним навантаженням (рисунок 8.5, а). Виріжимо елемент балки завдовжки  $dx$  (рисунок 8.5, б). Протягом довжини  $dx$  навантаження  $q$  вважатимемо розподіленим рівномірно.

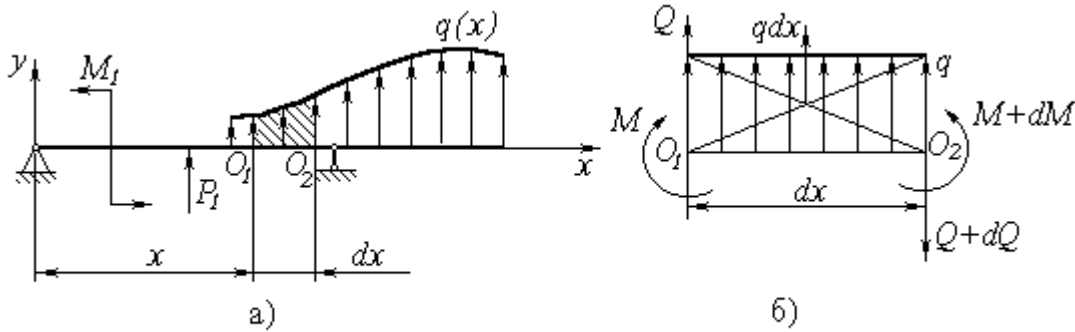


Рисунок 8.5

Складемо рівняння рівноваги виділеного елемента балки. Сума проекцій всіх сил на вісь  $y$

$$Q_y + q dx - (Q_y + dQ_y) = 0,$$

звідки

$$\frac{dQ_y}{dx} = q. \quad (8.3)$$

Складемо рівняння моментів всіх сил відносно осі  $z$ , яка проходить через точку  $O$

$$-M_z - \frac{q(dx)^2}{2} - Q_y dx + M_z + dM_z = 0.$$

Відкидаючи  $\frac{q(dx)^2}{2}$  як нескінченно малу величину другого порядку, отримаємо

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y. \quad (8.4)$$

Із двох отриманих диференціальних залежностей (8.3) і (8.4) легко отримати третю

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q. \quad (8.5)$$

### 8.4 Епюри поперечних сил і згинальних моментів

Поперечна сила і згинальний момент, будучи функціями від абсциси  $x$ , змінюються по довжині балки. Для визначення найбільш небезпечних перерізів балки зміну поперечної сили і згинального моменту по довжині балки зручно зображувати графічно. Такі графіки мають назву епюр поперечних сил і згинальних моментів. Розглянемо на прикладі порядок побудови епюр для балки.

Побудуємо епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, показаної на рисунку 8.6, а. Спочатку визначимо реакції опор  $R_A$  і  $R_K$ .

$$\sum M_A = 4 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 3,5 - 3 + R_K \cdot 5 = 0, \quad R_K = 3 \text{ кН},$$

$$\sum M_K = 4 - R_A \cdot 5 + 1 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 3 = 0, \quad R_A = 1 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum Y = 1 - 1 + 3 - 2 \cdot 3 + 3 = 0.$$

Отже, реакції розраховано правильно.

Побудуємо епюри  $Q_y$  і  $M_z$  для ділянки  $AB$ . Для цього зробимо переріз  $m_1-n_1$  на відстані  $x$  від опори  $A$  і розглянемо рівновагу відсіченої частини (рисунок 8.6, г). Згинальний момент  $M_z$  і поперечну силу  $Q_y$  в перерізі будемо зображати додатними, хоч це не обов'язково.

Ділянка  $AB$

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_y = R_A = 1 \text{ кН} \quad (8.6)$$

$$M_z = R_A x_1 - M_1 \quad (8.7)$$

при  $x_1 = 0 \text{ м}$   $M_z = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,

при  $x_1 = 1 \text{ м}$   $M_z = -3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

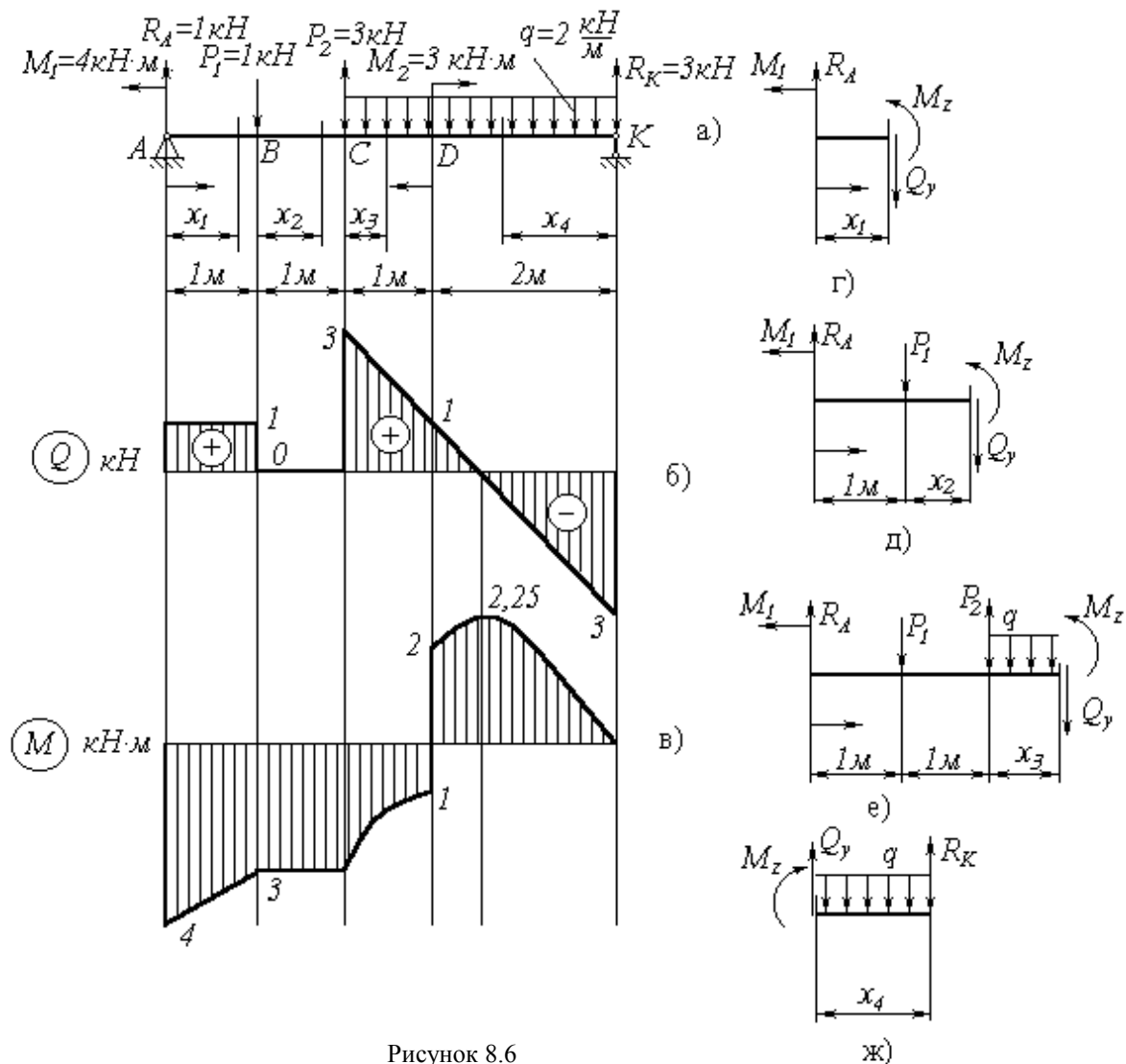


Рисунок 8.6

Як видно із (8.6) і (8.7) поперечна сила залишається сталою на всій довжині ділянки  $AB$  а згинальний момент змінюється за лінійним законом. Графіки цих залежностей показані на рисунку 8.6, б і рисунку 8.6, в. Додатні значення сили  $Q_y$  будемо відкладати вгору від базової прямої, а від'ємні – вниз. Епюри згинальних моментів домовимося будувати на стиснутих волокнах. Тому вгору від базової лінії будемо відкладати в масштабі додатні значення згинального моменту, а вниз – від'ємні.

Побудуємо епюри  $M_z$  і  $Q_y$  для ділянки  $BC$ . Для цього зробимо переріз  $m_2-n_2$  і розглянемо рівновагу лівої відрізаної частини балки (рис. 8.6, д)

Ділянка  $BC$

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_y = R_A - P_1 = 1 - 1 = 0 \text{ кН} \quad (8.8)$$

$$M_z = R_A(1 + x_2) - P_1 x_2 - M_1 \quad (8.9)$$

при  $x_2 = 0 \text{ м}$   $M_z = -3 \text{ кН·м}$ ,

при  $x_2 = 1 \text{ м}$   $M_z = -3 \text{ кН·м}$ .

Будуємо графіки функцій (8.8) і (8.9) на ділянці  $BC$  (рис. 8.6, б, в).

Із умов рівноваги лівої відсіченої частини балки знаходимо закони, за якими змінюються  $Q_y$  і  $M_z$  на ділянці  $CD$ .

Ділянка  $CD$

$$0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_y = R_A - P_1 + P_2 - q x_3 \quad (8.10)$$

при  $x_3 = 0 \text{ м}$   $Q_y = 3 \text{ кН}$ ,

при  $x_3 = 1 \text{ м}$   $Q_y = 1 \text{ кН}$ ,

$$M_z = R_A(2 + x_3) - M_1 - P_1(1 + x_3) + P_2 x_3 - \frac{q x_3^2}{2} \quad (8.11)$$

при  $x_3 = 0 \text{ м}$   $M_z = -3 \text{ кН·м}$ ,

при  $x_3 = 1 \text{ м}$   $M_z = -1,75 \text{ кН·м}$ .

Для побудови епюр  $Q_y$  і  $M_z$  на ділянці  $DK$  розглянемо рівновагу правої відрізаної частини балки (переріз  $m_3-n_3$ , рисунок 8.6, е)

Ділянка  $DK$

$$0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м}$$

$$Q_y = q x_4 - R_K \quad (8.12)$$

при  $x_4 = 0 \text{ м}$   $Q_y = -3 \text{ кН}$ ,

при  $x_4 = 2 \text{ м}$   $Q_y = 1 \text{ кН}$ ,

$$M_z = R_K x_4 - \frac{q x_4^2}{2} \quad (8.13)$$

при  $x_4 = 0 \text{ м}$   $M_z = 0 \text{ кН·м}$ ,

при  $x_4 = 2 \text{ м}$   $M_z = 2 \text{ кН·м}$ .

Із (8.4) випливає, що при  $Q_y = 0$  момент  $M_z$  приймає екстремальне значення. Значення  $x_1$ , при якому  $Q_y = 0$ , знайдемо з рівняння (8.12)

$$x_4 = \frac{R_K}{q} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ м}$$

Визначимо величину згинального моменту за формулою (8.13), при  $x_4 = 1,5 \text{ м}$

$$M_z = 2,25 \text{ кН·м}$$

Будуємо епюри  $Q_y$  і  $M_z$  на ділянці  $DK$  (рис. 8.6, б, в).

Як видно із рисунків 8.6, б, в на ділянках, де немає розподіленого навантаження ( $q=0$ ), поперечна сила  $Q_y$  залишається сталою, а момент  $M_z$  змінюється за лінійним законом (ділянка  $AB$ ). На ділянці  $BC$   $Q_y=0$ , а  $M_z=\text{const}$ . На ділянці з рівномірно розподіленим навантаженням ( $q=\text{const}$ ), епюра  $Q_y$  – лінійна, а згинальний момент  $M_z$  змінюється за законом квадратичної параболи (ділянка  $CD$ ).

В перерізах, де прикладені зосереджені сили, на епюрі  $Q_y$  мають місце стрибки на величину і в напрямках цих сил, а на епюрі  $M_z$  – злами.

В перерізах, де прикладені зосереджені моменти, на епюрі  $Q_y$  ніяких змін немає, а на епюрі  $M_z$  мають місце стрибки на величину цих моментів.

На ділянках, де  $Q_y=0$ , момент  $M_z$  сталий, а в перерізах, де  $Q_y \neq 0$ , згинальний момент набуває екстремального значення. Практично всі наведені властивості епюр  $Q_y$  і  $M_z$  випливають із залежностей (8.3) і (8.4).

## 8.5 Нормальні напруження при чистому згині

Згин балки, при якому згинальний момент сталий по довжині бруса, а поперечна сила дорівнює нулю, називається чистим згином. Чистий згин можна отримати, якщо прикласти до бруса в кінцевих перерізах рівні за величиною і протилежного напрямку пари сил, які діють в площині симетрії бруса (рисунок 8.7, а) або навантажити брус силами (рисунок 8.7, б). Досвід показує, що при чистому згині повздовжні лінії  $ab$  і  $a_0b_0$ , нанесені на поверхню бруса, викривляються, а поперечні  $a_0a$  і  $b_0b$  повертаються, залишаючись прямими і перпендикулярними зігнутим лініям (рисунок 8.8, в, г). Повздовжні волокна бруса зазнають простого розтягу або стиску, не спричинюючи взаємного бокового стиску.

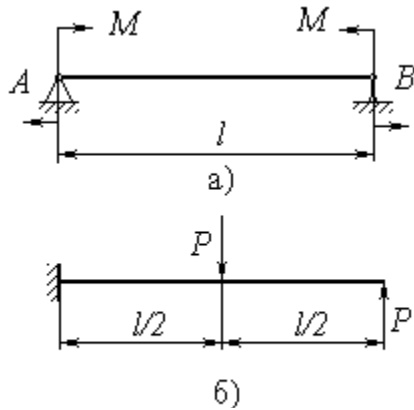


Рисунок 8.7

По висоті перерізу бруса деформація розтягання і стискання змінюється безперервно. Отже, в середині бруса існує шар, який відділяє зону розтягання від зони стискання. Волокна цього шару не зазнають ніякої деформації. Такий шар називають нейтральним. Лінія перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу бруса називається нейтральною лінією. Визначимо величину

нормальних напружень (рисунок 8.8, б), які виникають при чистому згині. Для цього розглянемо деформацію ділянки бруса, вирізаної двома перерізами, розташованими на відстані  $dx$  один від одного (рисунок 8.8, а). Нейтральний шар на цьому рисунку зображений лінією  $a_0b_0=dx$ .

Позначимо радіус кривизни нейтрального шару через  $\rho$ , а кут повороту перерізу n-n відносно перерізу m-m – через  $d\theta$ . Розглянемо відносне видовження довільного волокна  $ab$ , розташованого на відстані  $y$  від нейтрального шару (рисунок 8.8, б).

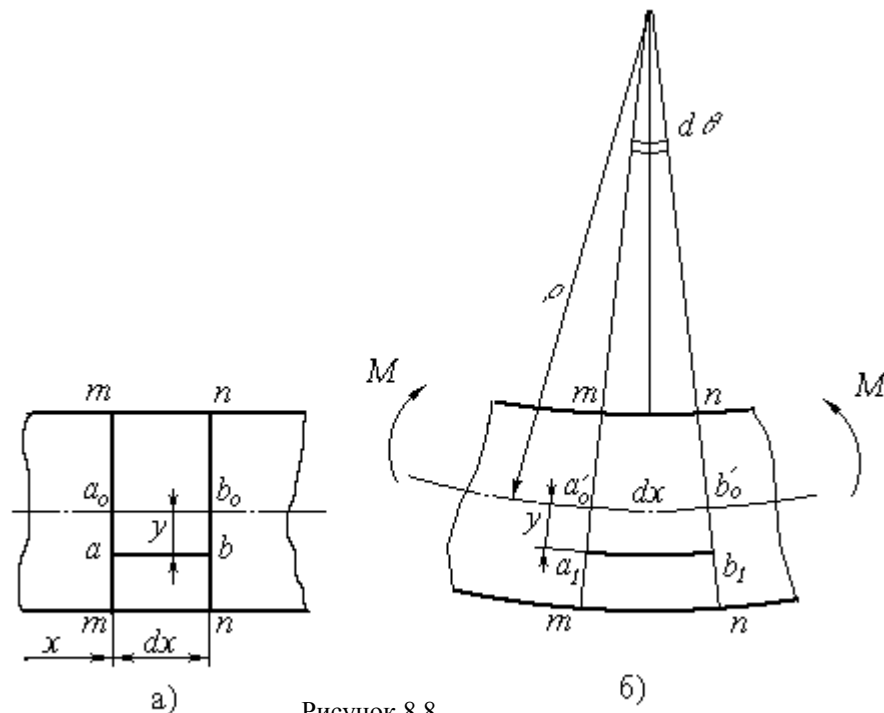


Рисунок 8.8

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (8.14)$$



За законом Гука нормальне напруження в волокні  $ab$  буде рівне

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \frac{y}{\rho}. \quad (8.15)$$

Розглянемо переріз  $m-m$  (рисунок 8.8, б). Візьмемо на площині перерізу елементарну площадку  $dA$  з координатами  $y$  і  $z$ . На цю площадку діє нормальне зусилля  $dN = \sigma_x dA$ . Сума моментів елементарних внутрішніх сил  $dN$  відносно осі  $z$  дає величину внутрішнього згинального моменту, який діє в цьому перерізі

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA. \quad (8.16)$$

Підставимо значення  $\sigma_x$  із (8.15)

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \quad \text{або} \quad M_z = \frac{E}{\rho} \cdot I_z,$$

де  $I_z = \int_A y^2 dA$  – осьовий момент інерції бруса відносно осі  $z$ .

Перепишемо (8.16) у вигляді

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (8.17)$$

Вираз (8.17) – це залежність між згинальним моментом і кривизною осі бруса при чистому згині. Добуток  $EI_z$  називається жорсткістю поперечного перерізу бруса при згині. Підставивши (8.17) в (8.15) знайдемо

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y. \quad (8.18)$$

Вияснимо положення осі  $z$  – нейтральної лінії перерізу. При чистому згині нормальна сила в перерізі дорівнює нулю, тобто

$$N = \int_A \sigma_x dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0. \quad (8.19)$$

Оскільки  $E/\rho \neq 0$ , то  $\int_A y \cdot dA = 0$ . Цей інтеграл являє собою статичний момент площі перерізу бруса відносно осі  $z$ , оскільки  $\int_A y \cdot dA = 0$ , то вісь  $z$  проходить через центр ваги перерізу.

При чистому згині дорівнює нулю згинальний момент відносно осі  $y$ , тобто

$$M_y = \int_A \sigma_x z \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot z \cdot dA = 0. \quad (8.20)$$

Оскільки відцентровий момент  $I_{zy} = \int_A zy dA = 0$ , то вісь  $z$  є головною.

Отже нейтральна лінія при згині збігається з головною віссю перерізу.

Як видно із (8.8) нормальні напруження змінюються по висоті перерізу за лінійним законом. На рисунку 8.9 показані епюри нормальних напружень. Найбільші напруження виникають у точках найбільш віддалених від нейтральної лінії, для яких  $y=y_{\max}$ . Величину найбільших напружень у перерізі визначають за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\max}. \quad (8.21)$$

Величина

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (8.22)$$

називається осьовим моментом опору перерізу. Поняття моменту опору вводиться тільки для перерізів, симетричних відносно нейтральної осі (рисунок 8.9, а, б). Для таких перерізів формула (8.21) записується у вигляді

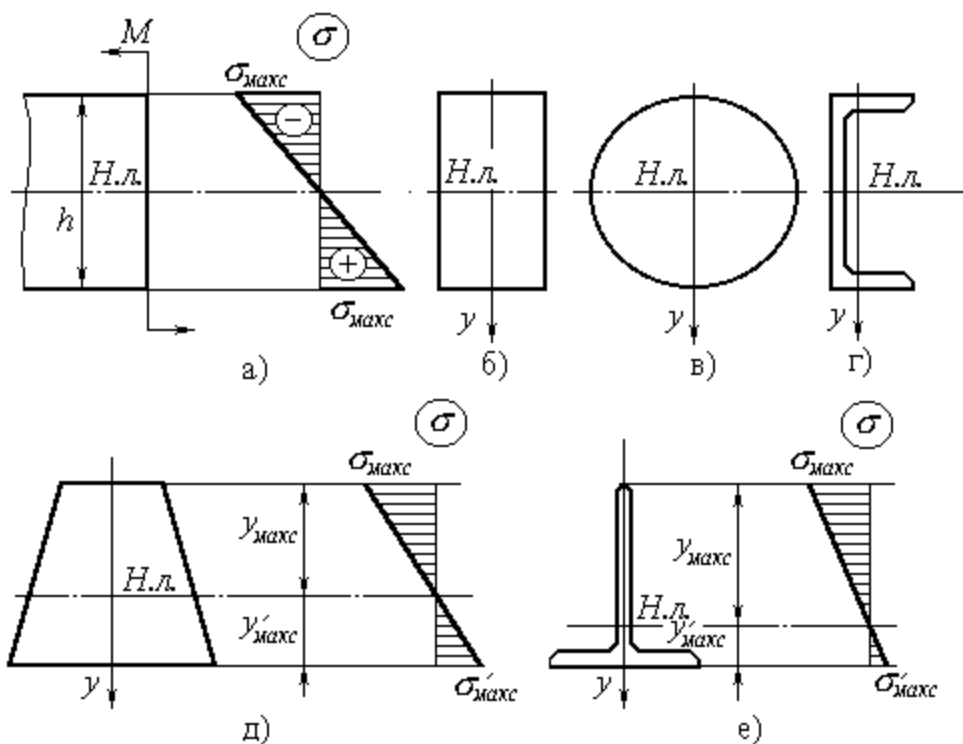


Рисунок 8.9  
Р1

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (8.23)$$

Якщо переріз несиметричний відносно нейтральної лінії, то

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_A, \quad \sigma_{\min} = \frac{M_z}{I_z} y_B, \quad (8.24)$$

де  $y_A, y_B$  – координати найбільш віддалених точок перерізу.

### 8.6 Поперечний згин. Дотичні напруження

При поперечному згині бруса в його перерізах, крім згинального моменту діє поперечна сила. У цьому випадку, крім нормальних напружень від згинального моменту, у перерізах виникають також дотичні напруження від поперечної сили. Їх розраховують за формулою Журавського

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y \cdot S_z^*}{b \cdot I_z}, \quad (8.25)$$

де  $Q_y$  – поперечна сила в перерізі,  $b$  – ширина перерізу в тому місці, де треба обчислити дотичні напруження,  $S_z^*$  – абсолютна величина статичного моменту площі відносно осі  $z$  тієї частини площі перерізу  $A^*$ ,

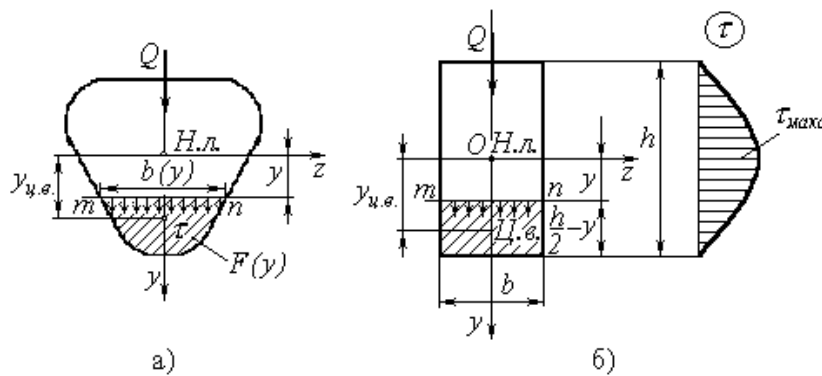


Рисунок 8.10

яка відсікається прямою, паралельною нейтральній осі  $z$ , проведеної через точку, в якій визначається дотичне напруження,  $I_z$  – момент інерції перерізу відносно осі  $z$

(рисунок 8.10, а).

Оскільки для перерізу  $Q_y$  і  $I_z$  величини сталі, то закон розподілу дотичних напружень по висоті перерізу визначається відношенням  $\frac{S_z^*}{b}$ . Наприклад, для прямокутного перерізу

$$S_z^* = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right),$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Підставивши значення  $S_z^*$  і  $I_z$  в (8.25), отримаємо

$$\tau_{yx} = \frac{3 Q_y}{2 b \cdot h} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (8.26)$$

Отже, по висоті прямокутного перерізу дотичні напруження змінюються за параболічним законом. Найбільшого значення дотичні напруження досягають в точках, розташованих на нейтральній лінії при  $y=0$  (рисунок 8.10).

### 8.7 Аналіз напруженого стану при згині. Розрахунки на міцність

Як видно із рисунка 8.9 і рисунка 8.10 в точках, які лежать на верхній і нижній границях поперечного перерізу, мають місце тільки нормальні напруження і в цих точках вони мають найбільше значення. Таким чином для цих точок умову міцності можна записати у вигляді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (8.27)$$

Якщо матеріал крихкий і по різному чинить опір розтягання і стисканню, то балки із такого матеріалу мають несиметричний по відношенню до нейтральної лінії переріз (рис. 8.8, г). Такі балки розміщують так, щоб більші за абсолютною величиною напруження були стискувальні, а менші – розтягувальні (рисунок 8.9, д). Умови міцності для таких випадків приймають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_A &= \frac{M_z}{I_z} \cdot y_A \leq [\sigma]_p, \\ \sigma_{\min} = \sigma_B &= \frac{M_z}{I_z} \cdot y_B \leq [\sigma]_m \end{aligned} \quad (8.28)$$

де  $[\sigma]_p$  – допустиме напруження при розтяганні, а  $[\sigma]_c$  – допустиме напруження при стисканні.

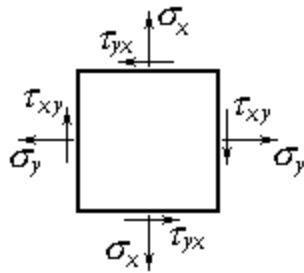


Рисунок 8.11

Таким чином для балок із пластичних матеріалів, які однаково працюють на розтяг і стиск, доцільно вибирати перерізи, симетричні відносно

їх нейтральних осей. При цьому забезпечується однаковий запас міцності по стиснутих і розтягнутих волокнах. Якщо крім умови міцності виходити ще із вимоги мінімальної маси балки, то найбільш раціональним буде переріз, який при заданій величині моменту опору  $W_z$  має найменшу площу перерізу  $A$ ,

або при заданій площі  $A$  – найбільший момент опору  $W_z$ . Порівнюючи з цих позицій, наприклад, прямокутний переріз з двотавровим, неважко переконатись в перевазі останнього.

У балки прямокутного перерізу матеріал в області нейтральної лінії повністю не використовується, оскільки знаходиться в зоні з малими напруженнями. У двотаврової балки більша частина матеріалу розміщена в найбільш напруженій зоні. Тому при однаковій міцності двотаврова балка в 2...3 рази легша прямокутної. В точках перерізу, розміщених на нейтральній осі, діють тільки дотичні напруження (рисунках 8.9 і 8.10), тому умова міцності для цих точок буде така:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y \cdot S_z^{\max}}{b \cdot I_z} \leq [\tau]. \quad (8.29)$$

В решти точок перерізу при поперечному згині має місце плоский напружений стан, тобто одночасно діють дотичні і нормальні напруження (рисунок 8.11). Умова міцності записується у вигляді

$$\sigma_{ek} \leq [\sigma]. \quad (8.30)$$

Головні напруження в цих точках визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2}, \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2}, \end{aligned} \quad (8.31)$$

Еквівалентне напруження  $\sigma_{ek}$  вибирається в залежності від прийнятої теорії міцності. Для пластичних матеріалів – за третьою теорією міцності.

$$\sigma_{ek}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2}. \quad (8.32)$$

Для крихких матеріалів за теорією Мора

$$\sigma_{ek}^{\text{I}} = \sigma_1 - m\sigma_3 = \frac{1-m}{2}\sigma_x + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2}, \quad (8.33)$$

де  $m = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_c}$ .

Більшість розрахунків на міцність при згині роблять за формулою (8.27). Для цього необхідно побудувати епюру згинальних моментів  $M_z$  і по ній визначити небезпечний переріз, тобто той переріз, в якому  $M_z$  має найбільше значення.

Можливі випадки, коли при великих поперечних силах в перерізах балки діють незначні згинальні моменти (короткі балки). В цьому випадку підбирають переріз по (8.27) і обов'язково перевіряють чи виконується умова міцності (8.29) для точок, які лежать на нейтральній лінії. Перерізи, в яких діють найбільша поперечна сила і найбільший згинальний момент можуть збігатися.

В балках з тонкостінним перерізом небезпечною може бути точка перерізу, розміщена в місці переходу стінки в полку (рисунок 8.9, г). Тут має місце плоский напружений стан, тобто  $\sigma_x \neq 0$ ,  $\tau_{xy} \neq 0$ .

Для перевірки міцності таких балок необхідно:

1. Визначити переріз, в якому діє найбільший згинальний момент і за (8.27) підібрати переріз.
2. Знайти переріз балки, в якому одночасно  $M_z$  і  $Q_y$  мають найбільші значення. Такий вибір не завжди однозначний, тому бувають випадки, коли таких перерізів більше одного.
3. Перевірити за формулами (8.32) або (8.33), залежно від матеріалу балки, чи виконуються ці умови міцності для небезпечної точки. Якщо умови міцності (8.32) або (8.33) не виконуються, то збільшують площу перерізу, або вибирають по сортаменту більший номер профілю.

Розглянемо наступний приклад.

Підібрати двотавровий переріз для балки, показаної на рисунку 8.12, а, якщо  $a=0,5$  м,  $q = 10$  кН/м,  $[\sigma]=160$  МПа.

Епюри поперечних сил і згинальних моментів показані на рисунках 8.12,б і 8.12,в.

За формулою (8.27) знаходимо

$$W_z \geq \frac{M_z}{[\sigma]} = \frac{9qa^2}{[\sigma]} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{160 \cdot 10^6} = 140,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 140,6 \text{ см}^3$$

По сортаменту підбираємо двотавр № 18,а (рисунок 8.12, г), для якого  $W_z = 143 \text{ см}^3$ ,  $S_z^{\max} = 81,4 \text{ см}^3$ ,  $I_z=1290 \text{ см}^4$ ,  $h=180$  мм,  $b=90$  мм,  $d=5,1$  мм,  $t=8,1$  мм.

Перевіримо, чи виконується умова міцності для точки, яка знаходиться в перерізі з найбільшою поперечною силою

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{\max}}{I_z d} = \frac{3,875 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 81,4 \cdot 10^{-6}}{5,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 24 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 24 \text{ МПа} < 0,5[\sigma]=80 \text{ МПа}$$

Таким чином, міцність за дотичними напруженнями в точці “4” забезпечена.

Перевіримо міцність в точці “2”, для перерізу, в якому діють найбільші поперечна сила і згинальний момент. Таким перерізом буде переріз D.

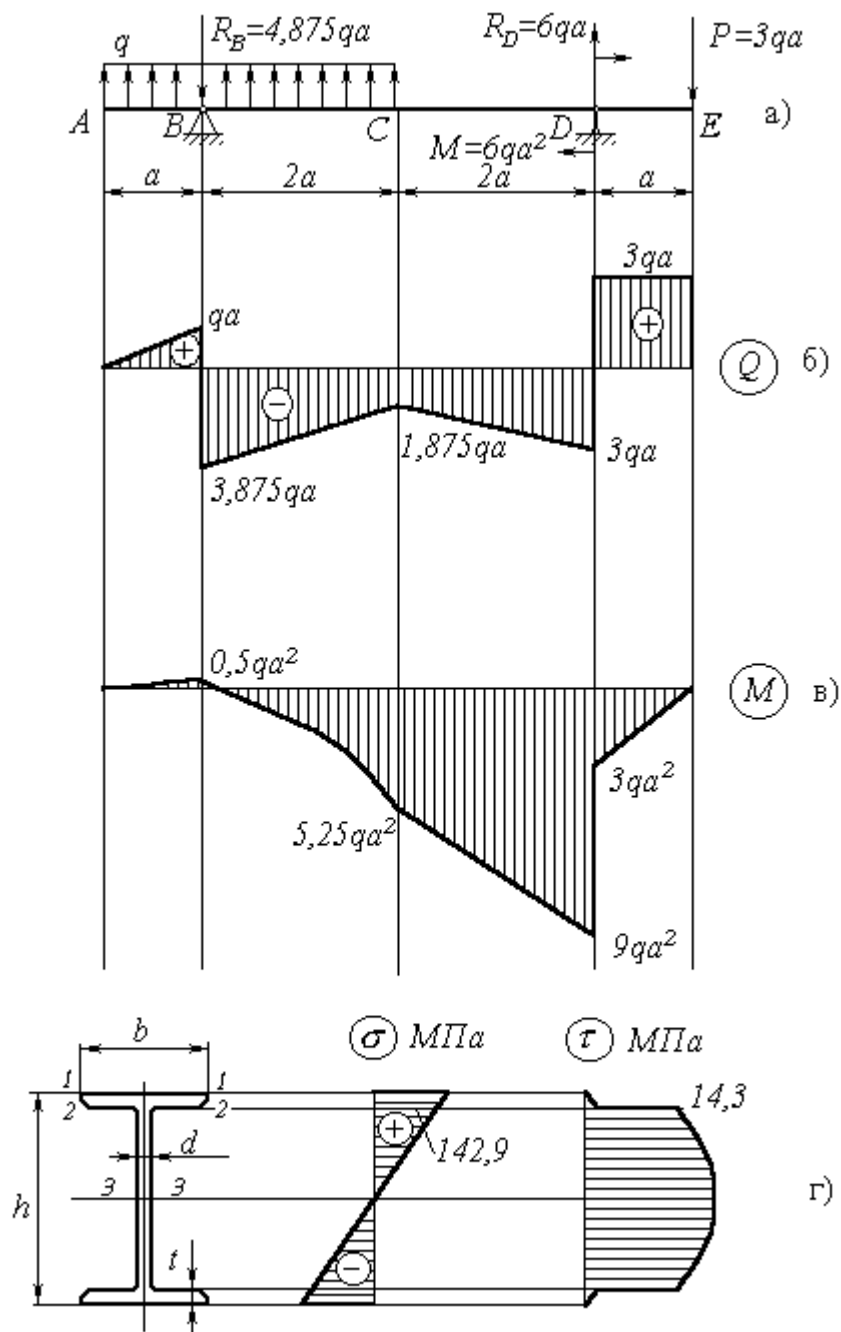


Рисунок 8.12

Рис. 8.12.

Визначимо нормальне напруження в точці "2"

$$\sigma^{(2)} = \frac{M_z}{I_z} y_2 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{1290 \cdot 10^{-8}} \left( \frac{180}{2} - 8,1 \right) \cdot 10^{-3} = 142,8 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 148 \text{ МПа}$$

Дотичне напруження в точці "2"

$$\tau^{(2)} = \frac{Q_y S_z^*}{I_z d} = \frac{3q \cdot a \cdot b \cdot t \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)}{I_z d} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 0,09 \cdot 8,1 \cdot 10^{-3} \left( \frac{180}{2} - \frac{8,1}{2} \right) \cdot 10^{-3}}{5,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 14,3 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 14,3 \text{ МПа}$$

Визначимо нормальне напруження в точці “2”

$$\sigma^{(2)} = \frac{M_z}{I_z} y_2 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2 \left( \frac{180}{2} - 8,1 \right) \cdot 10^{-3}}{1290 \cdot 10^{-8}} = 142,8 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 148 \text{ МПа}$$

Визначаємо головні напруження

$$\sigma_{1,3} = \frac{142,8}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{142,8^2 + 4 \cdot 14,3^2} = 71,4 \pm 72,8$$

$$\sigma_1 = 144,2 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = -1,4 \text{ МПа}.$$

Еквівалентне напруження за третьою теорією міцності

$$\sigma_{екв}^{222} = \sigma_1 - \sigma_3 = 144,2 + 1,4 = 145,6 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності для точки “2” також виконується.

### 8.8 Рівняння пружної лінії зігнутої балки

В інженерній практиці розраховують балки не тільки на міцність, але й на жорсткість. При згині жорсткість характеризується здатністю балки чинити опір викривленню. При деформації в межах пружності зігнуту вісь балки називають пружною лінією. Відхилення будь-якої точки осі балки від первісної прямої називають прогином. Кут повороту будь-якого перерізу балки відносно його початкового положення називають кутом повороту перерізу.

Раніше було встановлено, що кривизна пружної лінії прямо пропорційна згинальному моменту (8.17)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}.$$

З курсу вищої математики відомо, що

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (8.34)$$

таким чином


$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_z}{EI_z}. \quad (8.35)$$

Рівняння (8.35) називають диференціальним рівнянням пружної лінії і інтегрування цього рівняння пов'язане з великими труднощами. Тому в тих випадках, коли прогини невеликі, величиною

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  порівняно з одиницею можна знехтувати. Тоді дістанемо наближене диференціальне рівняння пружної лінії у вигляді

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M_z}{EI_z}. \quad (8.36)$$

Знак кривизни може не збігатися зі знаком згинального моменту і залежить від напрямку координатних осей. Якщо вісь  $y$  направити вгору а вісь  $x$  вправо, то знаки  $y''$  і  $M_z$  збігаються, тому в (8.36) запишемо знак “плюс”



$$(8.37)$$

Інтегруючи це рівняння один раз, дістанемо рівняння кутів повороту

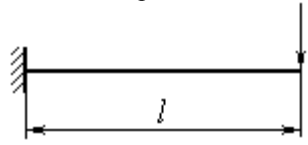
$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1. \quad (8.38)$$

Інтегруючи вдруге, знайдемо

$$y = \int dx \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1 x + C_2, \quad (8.39)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі інтегрування, які можна знайти із граничних умов.

Наприклад, для балки, показаної на рисунку 8.13 граничні умови



такі: при  $x=0$ ,  $y(0)=0$  і  $\theta(0)=0$  (8.40)

Враховуючи, що для цієї балки

$$M_z = -P(l - x)$$

Рисунок 8.13

після інтегрування (8.38) і (8.39) будемо мати

$$\theta = -\frac{P}{EI_z} \left( l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1, \quad (8.41)$$

$$y = -\frac{P}{EI_z} \left( l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2.$$

Використовуючи граничні умови (8.40), маємо  $C_1=C_2=0$ . Знайдені значення  $C_1$  і  $C_2$  підставимо в рівняння (8.41) тоді одержимо рівняння кутів повороту

$$\theta = -\frac{P}{EI_z} \left( l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right)$$

і рівняння пружної лінії

$$y = -\frac{P}{EI_z} \left( l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Підставивши  $x=l$ , знайдемо кут повороту і прогин вільного кінця балки



$$\theta_{\max} = -\frac{P \cdot l^2}{2EI_z}, \quad y_{\max} = -\frac{P \cdot l^3}{3EI_z}.$$

Знак “мінус” говорить про те, що переріз повернувся вправо і балка прогнулась вниз.

### 8.9 Визначення кутових та лінійних переміщень методом початкових параметрів

Визначення переміщень методом безпосереднього інтегрування диференціального рівняння пружної лінії в випадку балок з великою кількістю ділянок ускладнено. Ці труднощі пов'язані не з інтегруванням диференціальних рівнянь, а з технікою визначення довільних сталих інтегрування – складанні і розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Так, якщо балка має  $n$  ділянок, то інтегрування диференціального рівняння (8.36) необхідно виконувати для кожної ділянки. В такому випадку буде  $2n$  сталих інтегрування, які визначають із умов на границях ділянок. Тому на практиці часто використовують метод початкових параметрів, який базується на диференціальних залежностях, справедливих для будь-якого перерізу балки між кутом повороту  $\theta$  та моментом  $M_z$  і дозволяє при будь-якій кількості ділянок звести розв'язання до визначення всього двох сталих – прогину і кута повороту перерізу в початку координат.

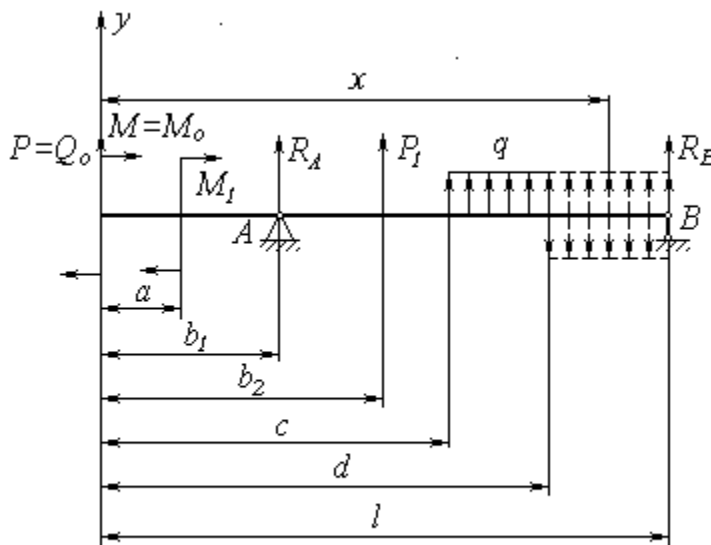


Рисунок 8.14

$$\frac{M_z}{EI_z} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (8.42)$$

між прогином  $y$  та кутом повороту  $\theta$

$$\theta = \frac{dy}{dx}. \quad (8.43)$$

При використанні цього методу початок координат розміщують в крайньому лівому перерізі і він є загальним для всіх ділянок балки.

Згинальний момент визначають як алгебраїчну суму моментів всіх сил розміщених зліва від перерізу. При цьому зовнішній зосереджений момент  $M_1$  (рисунок 8.14), прикладений на відстані  $a$  від початку координат, множать на величину  $(x-a)^0$ , яка дорівнює 1, а розподілене навантаження, у випадку його обриву (наприклад при  $x=d$ ) продовжують до перерізу, в якому визначають переміщення і починаючи з перерізу  $x=d$  вводять розподілене навантаження протилежного напрямку. Інтегрування диференціального рівняння виконують не розкриваючи дужок.

Напишемо вираз для згинального моменту в перерізі з координатою “ $x$ ” (рисунок 8.14)

$$M_z = M_0 + Q_0x + M_1(x-a)^0 + R_A(x-b_1) + P_1(x-b_2) + \frac{q(x-c)^2}{2} - \frac{q(x-d)^2}{2}. \quad (8.44)$$

Проінтегруємо (8.37) з врахуванням (8.44) один раз, одержимо рівняння кутів повороту для балки сталої жорсткості

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EI_z} \left( M_0 x + \frac{Q_0 x^2}{2} + \sum_{i=1}^n M_i (x - a_i) + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(x - b_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x - c_i)^3}{3!} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x - d_i)^3}{3!} \right) \quad (8.45)$$

Інтегруючи вдруге, одержимо рівняння прогинів

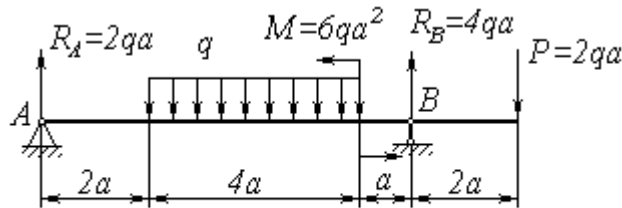
$$y = y_0 + \frac{1}{EI_z} \left( \frac{M_0 x^2}{2!} + \frac{Q_0 x^3}{3!} + \sum_{i=1}^n M_i \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(x - b_i)^3}{3!} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x - c_i)^4}{4!} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x - d_i)^4}{4!} \right) \quad (8.46)$$

В перерізі балки, де взято початок координат, в загальному випадку будуть діяти поперечна сила, згинальний момент, а також будуть мати місце кут повороту і прогин, які ми позначили відповідно  $Q_0$ ,  $M_0$ ,  $\theta_0$ ,  $y_0$  і називатимемо їх далі початковими параметрами (рисунок 8.14). Для балки, показаної на рисунку 8.14,  $Q_0 = P$ ,  $M_0 = M$ , а значення  $\theta_0$  і  $y_0$  можна визначити із умов закріплення

$$y(b_i) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Слід відмітити, що при визначенні кута повороту і прогину в перерізі з координатою  $x$  в рівняння (8.45) і (8.46) входять тільки ті навантаження, які знаходяться між початком координат і перерізом.

Приклад. Напишемо рівняння кутів повороту і прогинів для балки, показаної на рисунку 8.15.



Рівняння прогинів:  $y_0 = 0$ , оскільки початок координат збігається з опорою,

$$M_0 = 0, \quad Q_0 = R_A = 2qa.$$

Рисунок 8.15

$$y = \theta_0 x + \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{2qax^3}{6} - \frac{q(x-2a)^4}{24} + \frac{q(x-6a)^4}{24} - \frac{6qa^2(x-7a)^2}{2} + \frac{4qa(x-7a)^3}{6} \right]$$

Початковий параметр  $\theta_0$  визначимо із умови: при  $x=7a$ ,  $y(7a)=0$

$$y(7a) = 7\theta_0 a + \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{2qa(7a)^3}{6} - \frac{q(5a)^4}{24} + \frac{qa^4}{24} \right] = 0,$$

$$\theta_0 = -\frac{265}{21} \cdot \frac{qa^3}{EI_z}.$$

Тепер рівняння прогинів приймає вигляд

$$EI_z y = -\frac{265}{21} qa^3 x + \frac{1}{3} qax^3 - \frac{q}{24} (x-2a)^4 + \frac{q}{24} (x-6a)^4 - 3qa^2 (x-7a)^2 + \frac{2}{3} qa(x-7a)^3.$$

Запишемо рівняння кутів повороту

$$EI_z \theta = -\frac{265}{21} qa^3 + qax^2 - \frac{q}{6}(x-2a)^3 + \frac{q}{6}(x-6a)^3 - 6qa^2(x-7a) + 2qa(x-7a).$$

Визначимо, використовуючи ці рівняння, вертикальне переміщення і кут повороту перерізу  $B$ , для якого  $x=2a$

$$EI_z y_B = -\frac{265}{21} qa^3 2a + \frac{1}{3} qa 8a^3 = -\frac{474}{21} qa^4,$$

$$y_B = -\frac{474}{21} \frac{qa^4}{EI_z},$$

$$EI_z \theta_B = -\frac{265}{21} qa^3 + qa 4a^2 = -\frac{181}{21} qa^3,$$

$$\theta_B = -\frac{181}{21} \frac{qa^3}{EI_z}.$$

Знак “мінус” говорить про те, що при  $x=2a$  (переріз  $B$ ) балка прогинається вниз, а переріз повертається вправо.